A Representação de Espaço de Fases da Mecânica Quântica

Graus de liberdade com número finito de estados

EDITORIAL

Diógenes Galetti
Marcelo A. Marchiolli

A Representação de Espaço de Fases da Mecânica Quântica

Graus de liberdade com número finito de estados

2026

1ª Edição

Direção editorial: Victor Pereira Marinho e José Roberto Marinho

Capa: Fabrício Ribeiro

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Galetti, Diógenes
A representação de espaço de fases da mecânica quântica: graus de liberdade com número finito de estados / Diógenes Galetti, Marcelo A. Marchiolli. – São Paulo, SP: LF Editorial, 2026.

Bibliografia
ISBN 978-65-5563-735-9

1. Física 2. Física - Estudo e ensino 3. Mecânica quântica I. Marchiolli, Marcelo A. II. Título.

26-349238.0 CDD-530.12

Índices para catálogo sistemático:
1. Mecânica quântica: Física 530.12

Maria Alice Ferreira - Bibliotecária - CRB-8/7964

LF Editorial
www.livrariadafisica.com.br
www.lfeditorial.com.br
(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP
(11) 3936-3413 | Editora

Sumário

II Parte 2: Aplicações

Dedicatória

Que este livro seja um registro e uma fonte de inspiração para aqueles que buscam novas aprendizagens e experiências reais em mecânica quântica.

Este trabalho é dedicado a Lucélia, Cecília e Guilherme.
D.G.

Para meus pais, Angelo e Marlene, companheiros de uma vida.
M.A.M.

Prefácio/Apresentação

Descrições da Mecânica Quântica

A partir do último século a mecânica quântica estendeu os horizontes da Física e seu vasto campo de aplicações levou a imensos desafios que foram enfrentados com resultados inovadores e concomitante abertura de novas perspectivas [1–14]. Na sua elaboração, paralelamente ao estabelecimento de uma formulação matemática própria, já a partir das propostas iniciais, principalmente aquela apresentada por Born, Jordan, Heisenberg e Dirac [15–19], algumas abordagens também foram sendo expostas que visavam caracterizá-la como uma teoria completamente consolidada. Desta forma, foram apresentadas as assim chamadas *descrições* (*pictures*) de Heisenberg, Schrödinger e Dirac [1–14]. Cada descrição enfatizava algum aspecto próprio daquela abordagem particular de tal forma a pôr em evidência seus aspectos mais importantes; ao mesmo tempo todas tinham como raiz das argumentações um formalismo hamiltoniano, em consonância com aquele já estabelecido na mecânica clássica. Posteriormente, também foi apresentada a descrição de Feynman-Dirac das integrais de trajetória [20–22], baseada numa formulação lagrangeana, cujo aparato matemático, embora distinto daqueles usados nas outras descrições, leva a resultados em total conformidade com as previsões daquelas outras.

Do ponto de vista formal, um dos aspectos destacados das descrições de Heisenberg, Schrödinger e Dirac reside então numa possível conexão com a formulação da mecânica clássica baseada no formalismo hamiltoniano, apesar da possível não comutatividade do produto de elementos da álgebra usada na descrição da mecânica quântica, em contrapartida à comutatividade da descrição clássica. Desta forma, a conexão do formalismo hamiltoniano quântico e o clássico tem relevância central e vários conceitos de um formalismo encontram seus análogos no outro, ressalvadas as diferenças matemáticas específicas.

A fundamentação matemática proposta por von Neumann [23], baseada no conceito de espaços de Hilbert, essencialmente com a associação de vetores do espaço com estados do sistema físico em estudo e com a introdução de operadores que atuam sobre aqueles vetores, consolidou uma nova formulação operacional da mecânica quântica. Com a inclusão de novos conceitos matemáticos propostos por Dirac, essa formulação ganhou caráter operacional mais completo e foi amplamente aceita e adotada para o tratamento de problemas como o cálculo do espectro do oscilador harmônico linear e do átomo de hidrogênio. Como registrado na literatura, nestes casos particulares os espaços de Hilbert têm dimensão infinita. Ademais, com essa formulação foi também possível mostrar a equivalência da matemática subjacente às diferentes descrições, mantidas as características próprias de cada uma delas. Neste texto nos basearemos nesta formulação matemática da mecânica quântica e apontaremos, sempre que necessário, seus aspectos que serão relevantes para nossos propósitos.

A constatação de que os resultados de medidas experimentais de grandezas físicas deveriam estar associados a probabilidades levou a uma visão estatística da mecânica quântica [24–26]. Do ponto de vista matemático, este fato está diretamente conectado com a associação entre observáveis e operadores hermitianos, cujos espectros de autovalores fornecem os conjuntos das soluções possíveis para os resultados das medidas naqueles observáveis. Em particular, na descrição de Schrödinger, este fato é traduzido pela bem conhecida afirmação: o módulo quadrado da função de onda – quando é uma função da posição de uma partícula – reflete a probabilidade de se encontrar a partícula naquele ponto do espaço, de acordo com a proposta de Born. Assim, essa constatação introduziu um elemento adicional ao conjunto de postulados próprios da nova mecânica e foi motivo de objeções quanto ao papel a ser desempenhado pelo caráter estatístico da teoria. Esta questão está na raiz das *interpretações* da mecânica quântica e tem sido motivo de polêmicas continuadas. Por sua vez, do ponto de vista operacional, todo o formalismo matemático da mecânica quântica, mais o conceito de probabilidades, tem sido testado e os resultados têm comprovado sua consistência e solidez. Aqui não nos ateremos às especificidades das correntes antagônicas com suas diferentes interpretações da mecânica quântica e adotaremos o ponto de vista operacional: o caráter probabilístico é incorporado ao formalismo matemático da mecânica quântica da forma usual, como apresentado na literatura.

Embora ausente do conteúdo da maioria dos textos sobre mecânica quântica, a descrição de espaço de fases foi construída através de várias propostas e considerações em cuja essência já estava subjacente o caráter estatístico preconizado na teoria. Este caráter se manifestava na forma de uma função que teria papel análogo ao de uma distribuição de probabilidades. Na sua origem, esta descrição foi proposta por Wigner, em 1932, ao considerar uma formulação que incorporasse correções quânticas ao equilíbrio termodinâmico de um sistema físico clássico [27] e, para isso, introduziu uma função com características quânticas específicas. Não obstante, esta função podia assumir valores negativos, violando a condição essencial para ser caracterizada como uma distribuição de probabilidades genuína.[1] Na mesma ocasião,

[1]Historicamente, há o registro de que Dirac [28] também propôs uma função com as mesmas características e a descartou em virtude dela poder assumir valores negativos; sua conclusão na época foi que sua proposta provinha de uma aproximação precária.

outros autores, como Kirkwood [29], também propuseram funções visando incorporar efeitos quânticos à mecânica estatística clássica. Porém, somente na década seguinte houve um avanço significativo na elaboração mais detalhada e completa desta nova descrição. Foram os trabalhos de Groenewold [30] e Moyal [31] que estabeleceram os fundamentos do que ficou conhecido como *descrição de espaço de fases da mecânica quântica* e, finalmente, as bases conceituais e operacionais foram estabelecidas, na sequência, por vários autores. Como resultado, não só as características básicas da mecânica quântica, tais como relações de comutação e equações de evolução temporal de grandezas físicas eram reobtidas, como o caráter estatístico estava incorporado na descrição através da assim chamada função de Wigner. Todo o detalhamento desta descrição, na forma como apresentada por esses autores, é completamente adaptado para descrever sistemas físicos com um grau de liberdade descrito por variáveis contínuas, por exemplo o par canônico $q-p$, e os resultados obtidos por esta descrição estão em pleno acordo com aqueles já conhecidos pelas outras descrições. Esta nova descrição de espaço de fases destes sistemas físicos tem como fundamento matemático espaços de Hilbert de dimensão infinita, como bem sabido e consagrado por todas as aplicações realizadas.

A descrição de espaço de fases discreto e finito

Este não pretende ser um texto básico de mecânica quântica; de fato, ele tem por objetivo expor um procedimento particular que visa construir uma descrição de espaço de fases quando, especificamente, o espaço de estados do sistema físico em estudo é identificado como um espaço de Hilbert de dimensão finita. Uma vez construída, esta descrição de espaço de fases pode ser usada de forma direta para tratar quanticamente qualquer sistema físico que satisfaça a exigência da dimensionalidade finita de seu espaço de estados. Reconhecidamente, os casos mais simples e imediatos, embora não únicos, de interesse para aplicação deste procedimento são os graus de liberdade de spin e sistemas físicos constituídos de spins. Apesar de simples, eles ainda assim também se apresentam como um ponto de partida para estudos mais amplos de sistemas físicos como, por exemplo, qubits, qutrits e outros que têm interesse na área de informação quântica [32], o que mostra a abrangência das possibilidades de aplicação do procedimento proposto.

Ao longo das últimas décadas, algumas propostas foram apresentadas no sentido estrito de construir, em situações particulares, as equivalentes funções de Wigner discretas, como as de Wootters [33–36] e de Cohendet [37]; posteriormente a proposta de Wootters foi estendida de tal forma a contemplar mapeamentos e descrições formais de espaços de fases discretos e finitos [38–42]. Ao mesmo tempo, foi apresentado um procedimento que primordialmente permite estabelecer, em analogia com a descrição de espaço de fases no contínuo, uma representação de espaço de fases finito e discreto, e que também explicita, como casos particulares, as funções de Wigner de maneira natural [43, 44], não como propostas *ad hoc*. Nesta abordagem, várias adaptações matemáticas foram desenvolvidas *ab initio* de tal forma que a descrição resultante tem características próprias, não sendo meramente uma versão discretizada daquela no contínuo. Também aqui são obtidas relações de comutação e equações de evolução temporal de grandezas físicas associadas ao sistema físico em estudo; adicionalmente, aplicações em exemplos específicos são explicitadas. É importante ressaltar, porém, que, apesar do número restrito de aplicações do presente texto, a abordagem proposta pode ser usada para descrever qualquer sistema físico cujo espaço de estados possa ser associado a um espaço de Hilbert de dimensão finita.

Apresentação do conteúdo do livro

O presente texto pressupõe que os leitores devam ter uma formação básica em mecânica clássica e mecânica quântica, e não tem como objetivo ser um livro texto naqueles temas. Sob esta perspectiva, a seleção dos tópicos aqui apresentados teve como objetivo, por razões de completeza, primeiramente a necessidade de reapresentar o conteúdo básico das mecânicas clássica e quântica, somente com o propósito de fundamentar nossa argumentação, para, em seguida, elaborar a construção de uma proposta de descrição de espaço de fases discreto e finito. Com este objetivo, o material foi organizado da seguinte forma: Na primeira parte apresentamos, nos dois primeiros capítulos, uma breve revisão das ideias fundamentais da mecânica clássica na formulação de Hamilton e da mecânica quântica, conforme o que é bem estabelecido na literatura atual. Esta recuperação visa mostrar, de forma sucinta, as bases sobre as quais as propostas de conexão entre as duas mecânicas estão fundamentadas. Assim, no Capítulo 3, são expostas as tentativas de reconhecer uma formulação matemática que permita a passagem do formalismo de Hamilton associado à mecânica quântica para a mecânica clássica. Lá, os trabalhos pioneiros de Weyl [45], von Neumann [46], Wigner [27], Groenewold [30] e Moyal [31] são abordados de forma mais detalhada uma vez que servirão de base para a exposição do formalismo que fundamenta a descrição de espaço de fases da mecânica quântica quando o espaço de Hilbert de estados associado ao sistema físico em estudo tem dimensão infinita. O detalhamento daquela descrição é apresentado no Capítulo 4 onde são apresentadas as diferentes maneiras de se construir bases de operadores responsáveis por mapeamentos entre operadores da mecânica quântica e funções de variáveis canônicas clássicas. Um dos resultados importantes desse estudo consiste na verificação de que a transformação inversa não se constitui num processo de quantização: somente algumas funções de variáveis canônicas clássicas estão associadas, através do mapeamento proposto, a operadores relacionados com observáveis físicos. Assim, para todos os operadores de interesse, por exemplo os operadores posição $\hat{q}$ e momento $\hat{p}$, as suas contrapartidas naquele espaço de fases contínuo podem ser encontradas. O operador densidade, que descreve o estado do sistema físico, tem um papel muito importante e destacado neste contexto, e sua contrapartida no espaço de fases é conhecida como função de Wigner. Adicionalmente também são obtidas as contrapartidas de produtos de operadores, comutadores, anticomutadores e da equação de evolução temporal do operador densidade. Com esses representantes no espaço de fases dos operadores e suas respectivas equações de evolução temporal é possível realizar todos os cálculos com resultados equivalentes àqueles da mecânica quântica nas descrições conhecidas. O essencial desses procedimentos é apresentado no Capítulo 4, onde alguns exemplos são apresentados.

O Capítulo 5 apresenta o conteúdo central deste texto. Nele, algumas questões essenciais são abordadas: Ainda é possível termos uma descrição de espaço de fases quando o espaço de Hilbert tem dimensão finita? Como construir bases de operadores que permitam realizar o mapeamento de operadores, que agem naquele espaço de estados, em funções de variáveis clássicas? Quais são suas características básicas? É também possível obter uma equação equivalente para a evolução temporal de um operador densidade nesse novo espaço de fases? Todas estas questões são abordadas e um mapeamento é proposto e estabelecido de tal forma que temos as contrapartidas de operadores e suas equações de evolução temporal numa representação de espaço de fases adaptado ao caráter finito e discreto do espaço de Hilbert de estados: agora o espaço de fases é um reticulado de dimensão $N \times N$ finito e discreto, com topologia de toro, onde N é a dimensão do espaço de Hilbert associado. Não obstante esta característica peculiar, todos os procedimentos são bem estabelecidos de tal forma a obtermos os mapeamentos de operadores que nos levam aos resultados desejados. Da mesma forma que na representação contínua de espaço de fases, no presente caso também podemos obter uma função de Wigner equivalente – agora uma função definida sobre números inteiros – e sua equação de evolução temporal (o tempo é considerado uma variável contínua). Os procedimentos neste caso, que seguem paralelamente o que foi exposto no caso do espaço de fases contínuo, são discutidos com detalhes e alguns exemplos são apresentados com a finalidade de clareza conceitual e operacional. Particularidades dessa descrição discreta e finita são destacadas e as diferenças com relação à descrição contínua são exibidas e exploradas.

A obtenção de um limite contínuo a partir da formulação discreta do espaço de fases é detalhada no Capítulo 6 e a identificação dos resultados com aqueles apresentados no Capítulo 4 é enfatizada. O embrião do processo de obtenção de um limite contínuo já fora proposto por Schwinger [47] e é por nós aqui explorado e estendido de forma bem justificada matematicamente. Desta forma, as expressões mapeadas para produtos de operadores, comutadores, anticomutadores e a equação de evolução temporal da função de Wigner no contínuo são recuperadas. Adicionalmente, como subproduto da discussão referente ao operador deslocamento na versão discreta, configurou-se a possibilidade de definição de estados coerentes discretos, em completa analogia com aqueles definidos no contínuo. Neste processo, as funções ϑ_3 de Jacobi desempenham papel essencial, em contrapartida às gaussianas que permeiam a descrição dos estados coerentes no contínuo. Esses estados coerentes discretos são definidos sobre o espaço de fases finito e discreto e exibem explicitamente o caráter quântico da descrição proposta.

Na segunda parte do texto apresentamos inicialmente, Capítulos 7 e 8, alguns exemplos de problemas físicos nos quais o uso da descrição de espaços de fases discreto e finito nos permite obter resultados concretos e de interpretação física direta. Aqueles exemplos contemplam desde a restauração de simetria quando uma função de onda variacional viola uma simetria discreta, bem como a descrição do comportamento coletivo de um sistema de férmions cuja interação é dada por um hamiltoniano de um modelo simples, solúvel, envolvendo termos de um e dois corpos, o modelo de Lipkin [48–50]. Nesta última aplicação, a evolução temporal da função de Wigner é obtida e a análise do comportamento do sistema de férmions é realizada para vários valores da intensidade da interação de dois corpos.

Adicionalmente, explorando aspectos mais formais, apresentamos no Capítulo 9 um procedimento que permite extensões discretas dos mapeamentos – definidos no contínuo – propostos no formalismo de Cahill-Glauber [51, 52] de tal forma que, além da função discreta de Wigner, temos também os análogos discretos das funções de Husimi [53] e Glauber-Sudarshan [54, 55]. Estas novas funções assim obtidas satisfazem todos os requisitos exigidos para representarem estados quânticos definidos num espaço de Hilbert discreto de dimensão finita, da mesma forma que aquelas funções o fazem no contínuo. Desta forma, a existência destas novas funções, definidas no espaço de fases discreto e finito, além daquela de Wigner, permite estabelecer e confirmar uma completa analogia com a proposta de Cahill-Glauber no contínuo, e consolidar o potencial descritivo do formalismo proposto.

No Capítulo 10 é apresentado um procedimento para implementar o análogo discreto da reconstrução tomográfica de estados quânticos quando o espaço de estados tem dimensão finita. De fato, o fio condutor para estabelecermos os resultados no espaço de fases discreto e finito está calcado na possibilidade de construírmos formalmente um análogo discreto da transformação de Radon contínua [56, 57], mediante o auxílio de uma classe ampla de transformações simpléticas para sistemas quânticos descritos por um espaço de estados de dimensão finita. Inicialmente introduzida por Vourdas [58] no contexto de transformações unitárias do tipo Bogoliubov, essas transformações permitem, por exemplo, reconstruir a função de Wigner discreta a partir de funções (ou quantidades) mensuráveis, em completa correspondência com o caso contínuo. O objetivo central deste último capítulo consiste então em estender este cenário de modo a abranger os resultados obtidos no Capítulo 9, encerrando assim a parte correspondente às aplicações.

Como complemento ao corpo central do texto, foram acrescentados alguns Apêndices que visam expor, além de alguns detalhes de cálculo que julgamos serem de utilidade para o leitor, aspectos básicos de teoria de grupos, anéis, congruências, teoria de números, transformadas de Fourier discretas e propriedades da funções ϑ de Jacobi, que foram usados na fundamentação das nossas propostas. Esses Apêndices também têm a finalidade de servir de conteúdo matemático mínimo para leitores que não tiveram contato anterior com esses temas e que porventura queiram ter acesso a eles para uma leitura mais completa do texto. Assim, os temas foram separados em Apêndices distintos para auxiliar os leitores interessados, sendo que neles, sempre que possível, fizemos referência explícita a quais contextos, nos diferentes capítulos, aqueles temas são relevantes.

Agradecimentos

D.G. Ao Prof. A.F.R. de Toledo Piza, com quem, após uma discussão, ficou claro que um ponto essencial nas ideias da mecânica quântica na representação de espaço de fases no contínuo era a construção de uma base no espaço de operadores correspondente. Com aquele ponto de partida, foi-nos possível perceber a importância das bases de operadores de Schwinger para a construção das equivalentes representações da mecânica quântica em espaços de fases discretos quando o espaço de Hilbert do sistema físico tem dimensão finita. Adicionalmente, pela leitura sempre crítica e pertinente do primeiro embrião do texto, quando apontou problemas no conteúdo e forma da apresentação, sugerindo implementações visando ampliar o escopo do livro.

D.G. e M.A.M. Ao Dr. Maurizio Ruzzi, por ter trabalhado arduamente desde seu doutorado em vários aspectos do formalismo, tendo estabelecido várias bases sólidas para as extensões exigidas visando a ampliação da proposta inicial. Sua presença como coautor deste texto seria altamente festejada.

D.G. Ao Prof. B.M. Pimentel Escobar, amigo e colaborador de longo percurso, pelo interesse e dedicação incansáveis, fazendo leituras críticas de todos os capítulos e apresentando sugestões estimulantes em todos os estágios da tarefa árdua da elaboração do texto.

D.G. Ao Prof. Celso L. Lima, amigo e colaborador em vários projetos, pela leitura perspicaz de alguns capítulos do texto, tendo apresentado, como sempre, sugestões pertinentes.

D.G. Ao Prof. Salomon S. Mizrahi, amigo e colaborador desde os tempos da Fundação Instituto de Física Teórica, pela leitura de alguns capítulos e sugestões pertinentes sobre conceitos, referências e por chamar a atenção para possíveis confusões na apresentação do conteúdo do texto.

D.G. Aos colegas do Instituto de Física Teórica que apoiaram a iniciativa.

M.A.M. Ao Prof. Reginaldo de Jesus Napolitano, pela amizade ao longo de todos esses anos marcada por discussões sérias e muitas vezes hilariantes sobre física, seguidas de fatos memoráveis de aprendizagem que marcaram uma etapa importante de minha formação acadêmica. Espero que esse texto apresente contribuições efetivas nas lacunas deixadas em nossas discussões acerca de mecânica quântica.

M.A.M. Ao Prof. Paulo Eduardo Marques Furtado de Mendonça, amigo e colaborador desde os tempos memoráveis do Instituto de Física de São Carlos (USP). Grato pela leitura e sugestões apresentadas em alguns capítulos.

M.A.M. Ao Prof. Salomon S. Mizrahi pela amizade, orientação e paciência em minha jornada acadêmica na Universidade Federal de São Carlos, onde as primeiras discussões sobre a descrição da mecânica quântica em espaço de fases contínuo foram realizadas. Por todo aquele maravilhoso período, a minha eterna gratidão.

D.G. e M.A.M. A todos os amigos que, ao longo do tempo, nos estimularam nessa tarefa de redigir um texto sobre um tema que não é tão difundido, mas que tem se provado de interesse em várias áreas da Física.

Pequenos deslizes e erros podem ainda ter sobrevivido ao longo do texto; eles são de responsabilidade dos autores. Apesar deles, esperamos que os leitores adquiram algum interesse e se encorajem a dar contribuições adicionais ao tema.

Referências Bibliográficas

[1] B. L. van der Waerden, *Sources of Quantum Mechanics*. New York: Dover Publications Inc., 1968.

[2] S. I. Tomonaga, *Quantum Mechanics*. Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1962, vol. I.

[3] S. I. Tomonaga, *Quantum Mechanics*. New York: Interscience Publishers Inc., 1962, vol. II.

[4] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 3ª ed. Oxford: Oxford University Press, 1947.

[5] A. F. R. Toledo Piza, *Mecânica Quântica*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

[6] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 3ª ed. Tokyo: McGraw-Hill Co., 1968.

[7] A. Messiah, *Quantum Mechanics*. Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1958, vol. I.

[8] A. Messiah, *Quantum Mechanics*. New York: North Holland Publishing Co., 1958, vol. II.

[9] D. Bohm, *Quantum Theory*. New York: Dover Publications Inc., 1989.

[10] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, 2ª ed. Oxford: Pergamon Press, 1965.

[11] L. E. Ballantine, *Quantum Mechanics: A Modern Development*. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1988.

[12] N. Zettili, *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*. Chichester: John Wiley & Sons, 2004.

[13] A. Davidov, *Quantum Mechanics*. Michigan: NEO Press, Ann Harbor, 1969.

[14] E. Prugovečki, *Quantum Mechanics in Hilbert Space*, 2ª ed. New York: Dover Publications Inc., 2006.

[15] W. Heisenberg, "Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen", *Zeits. für Physik*, v. 33, p. 879, 1925.

[16] M. Born e P. Jordan, "Zur Quantenmechanik", *Zeits. für Physik*, v. 34, p. 858, 1925.

[17] M. Born, W. Heisenberg e P. Jordan, "Zur Quantenmechanik. II.", *Zeits. für Physik*, v. 35, p. 557, 1926.

[18] P. A. M. Dirac, "The Fundamental Equations of Quantum Mechanics", *Proc. Royal Soc. A*, v. 109, n. 752, p. 642, 1926.

[19] P. A. M. Dirac, "Quantum Mechanics and a Preliminary Investigation of the Hydrogen Atom", *Proc. Royal Soc. A*, v. 110, n. 755, p. 561, 1926.

[20] R. P. Feynman, "Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics", *Rev. Mod. Phys.*, v. 20, n. 2, p. 367, 1948.

[21] P. A. M. Dirac, "The Lagrangian in Quantum Mechanics", *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, v. 3, n. 1, p. 64, 1933.

[22] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Polymer Physics, and Financial Markets*, 4ª ed. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004.

[23] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, 6ª ed. New Jersey: Princeton University Press, 1971.