

Teoria Axiomática dos Conjuntos

COMISSÃO EDITORIAL:

Thiago Augusto Silva Dourado

César Polcino Milies

Carlos Gustavo Moreira

Fábio Maia Bertato

Willian Diego Oliveira

Gerardo Barrera Vargas

Antônio de Andrade e Silva

TEORIA AXIOMÁTICA *dos Conjuntos*



LF Editorial
São Paulo — 2026

Copyright © 2026 LF Editorial

1a. Edição

Editor: VÍCTOR PEREIRA MARINHO / JOSÉ ROBERTO MARINHO

Projeto gráfico e diagramação: THIAGO AUGUSTO SILVA DOURADO

Capa: FABRÍCIO RIBEIRO

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Silva, Antônio de Andrade e

Teoria axiomática dos conjuntos / Antônio de Andrade e Silva. -- São Paulo :
LF Editorial, 2026. -- (Textuniversitários ; 42)

Bibliografia

ISBN 978-65-5563-777-9

1. Axiomas 2. Linguagem matemática 3. Matemática 4. Números – Teoria 5. Teoria
dos conjuntos I. Título II. Série.

26-361500.0

CDD-510

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática 510

Maria Alice Ferreira – Bibliotecária – CRB-8/7964

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida
sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora. Aos infratores
aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei n. 9.610, de 19
de fevereiro de 1998.

Impresso no Brasil

Printed in Brazil



www.lfeditorial.com.br

Visite nossa livreria no Instituto de Física da USP

www.livrariadafisica.com.br

Telefones:

(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP

(11) 3936-3413 | Editora

*Aos meus filhos,
José Augusto, Amanda e Fernanda.*

Prefácio

*“Ninguém nos poderá expulsar do
Paraíso que Cantor criou.”*

DAVID HILBERT

A ideia de escrever este texto surgiu quando o autor escreveu um texto “uma introdução axiomática dos conjuntos” para o Curso de Matemática a Distância — EAD/VIRTUAL

O que nos motiva escrever a este texto é o aspecto marcante da pesquisa em matemática no último século e no papel crescente que a abordagem axiomática vem representando. O método axiomático certamente não é novo em matemática, tendo sido empregado por Euclides em seus Elementos. No entanto, apenas em anos relativamente recentes tem sido adotado em partes da matemática além da geometria. Isso tornou-se possível por causa de uma completa compreensão da natureza dos axiomas e da axiomatização da lógica.

O texto é dividido em oito capítulos, dos quais o primeiro é responsável pela introdução do método axiomático e pelos resultados utilizados em todo o texto. Em cada estudo específico, busca-se a caracterização do objeto por meio de propriedades que possibilitem ao leitor estabelecer correspondências entre determinadas situações-

problema da vida real e a espécie de função focalizada, objetivando sua utilização na construção de uma tradução matemática da respectiva situação.

Para desenvolver a capacidade do leitor de pensar por si mesmo em termos das novas definições, mantivemos no final de cada seção uma extensa lista de exercícios, na qual a maioria foi selecionada dos livros citados ao final do texto, cujas respostas e/ou sugestões estão incluídas ao final do texto. Devemos, porém, alertar aos leitores que os exercícios variam muito em grau de dificuldade, sendo assim, não é necessário resolver todos numa primeira leitura.

No capítulo 1 apresentaremos um pouco da história do surgimento do método axiomático na matemática, que será necessário para o entendimento dos capítulos subsequentes. No capítulo 2 apresentaremos, via método axiomático, os elementos básicos da Teoria dos Conjuntos por meio dos sete primeiros axiomas. Definimos, ademais, as operações com conjuntos: união, interseção, complemento, diferença, gráficos, famílias, produto cartesiano e algumas propriedades algébricas.

No capítulo 3 estudaremos os problemas de aplicações ordinárias de matemática tais como: relação de ordem, conjuntos parcialmente ordenados, elementos maximais e minimais, maior e menor elemento, supremo e ínfimo de um conjunto. Além disso, estudaremos reticulados e conjuntos bem ordenados.

No capítulo 4 apresentaremos as formulações clássicas do axioma da escolha, dadas por Ernst Zermelo, e suas principais consequências.

No capítulo 5 construiremos, formalmente, o conjunto dos números naturais, o qual será munido de todas as propriedades que são associadas com os números naturais do nosso pensamento. Além disso, com o “axioma da infinidade” completaremos a Teoria Axiomática dos Conjuntos, segundo Ernst Zermelo.

No capítulo 6 apresentaremos o conceito de conjuntos equipotentes e o conceito formal de números cardinais via método axiomático. Também, veremos que o conjunto dos números cardinais possui quase todas as propriedades algébricas do conjunto dos números naturais.

No capítulo 7 apresentaremos o conceito formal de números ordinais via método axiomático. Também, veremos que o conjunto dos números ordinais possui quase todas as propriedades algébricas do conjunto dos números naturais.

Finalmente, no capítulo 8 dedicaremos a uma introdução do conjunto dos números reais via o método axiomático de Dedekind a partir do conjunto dos números racionais, a qual está em consonância com a construção do conjunto dos números naturais. Além disso, apresentaremos a representação de um número real em uma base qualquer.

Agradecemos aos colegas e alunos do Departamento de Matemática que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste texto. Em particular, meus agradecimentos ao professor Thiago Dourado pelo estímulo à publicação deste texto.

ANTÔNIO DE ANDRADE E SILVA

João Pessoa – PB, junho de 2026

Sumário

Prefácio	VII
1 O método axiomático	1
1.1 Introdução histórica	2
1.2 Modelos axiomáticos	7
Exercícios	15
1.3 Caracterização de um sistema de axiomas	17
Exercícios	26
2 Conjuntos	31
2.1 Introdução histórica	32
2.2 Conjuntos	34
Exercícios	42
2.3 Gráficos e famílias	44
Exercícios	55
2.4 Funções	57
Exercícios	70

3	Conjuntos parcialmente ordenados	75
3.1	Conjuntos ordenados	76
	Exercícios	82
3.2	Isomorfismos	84
	Exercícios	89
3.3	Elementos notáveis e dualidade	91
	Exercícios	107
3.4	Conjuntos bem ordenados	110
	Exercícios	124
4	Axioma da escolha e aplicações	127
4.1	Axioma da escolha	128
	Exercícios	139
4.2	Aplicações	140
	Exercícios	156
4.3	Princípio da boa ordenação	158
	Exercícios	162
5	Os números naturais	165
5.1	Os números naturais	166
	Exercícios	176
5.2	Aritmética dos números naturais	177
	Exercícios	191
6	Números cardinais	193
6.1	Conjuntos equipotentes	194
	Exercícios	204
6.2	Números cardinais	205
	Exercícios	212
6.3	Aritmética dos números cardinais	213
	Exercícios	220
7	Números ordinais	223
7.1	Números ordinais	225
	Exercícios	236

7.2	Aritmética dos números ordinais	238
	Exercícios	247
8	Construção dos números reais	249
8.1	Os números inteiros	249
	Exercícios	256
8.2	Os números racionais	258
	Exercícios	264
8.3	Os números reais	264
	Exercícios	275
8.4	Representação de números reais	275
	Respostas e Sugestões	283
	Referências Bibliográficas	343
	Índice Remissivo	345

O método axiomático

Quando falamos que um objeto pertence a outro objeto, queremos dizer, simplesmente, que o primeiro deles depende do segundo. Situações de pertinência aparecem frequentemente em nossa vida. Por exemplo, um ponto pertence a uma reta.

A partir de agora, você está convidado a nos acompanhar neste passeio pelo mundo dos axiomas e postulados. Juntos, analisaremos detalhadamente as caracterizações de um sistema de axiomas e a independência de um axioma.

É importante salientar que alguma familiaridade com conceitos tais como: conjuntos, conjuntos numéricos, espaço vetorial, grupo, dentre outros, é necessário para uma boa leitura deste capítulo.

Axiomas e postulados aparecem com mais frequência na Geometria Plana. Considere, por exemplo, o seguinte postulado:

Se uma linha reta intercepta duas outras linhas retas formando ângulos interiores no mesmo lado menor do que dois ângulos retos, as duas linhas retas, se prolongadas indefinidamente, se interceptarão no lado em que a soma é menor que dois ângulos retos.

Este e outros axiomas da Geometria Plana serão tratados neste capítulo.

1.1 Introdução histórica

Nesta seção apresentaremos um pouco da história do surgimento do método axiomático na matemática. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar o livro Tarski [12] ou o livro Wilder [13].

Nos textos de Geometria Plana, visto no ensino fundamental, encontramos dois grupos fundamentais de afirmações, um chamado de axiomas e outro chamado de postulados. Formalmente:

Um *axioma* é uma afirmação que dispensa explicação, ou seja, é uma verdade universal.

Exemplo 1.1.1 Noções comuns:

1. O todo é maior do que cada uma de suas partes.
2. O todo é a soma de suas partes.
3. Coisas iguais a uma outra coisa são iguais entre si.

Um *postulado* é um fato geométrico simples e óbvio que podemos supor sua validade.

Exemplo 1.1.2 Postulados:

1. Dois pontos distintos determinam uma e somente uma reta.
2. Uma reta pode ser estendida indefinidamente.
3. Se r é uma reta e P é um ponto fora de r , então existe uma única reta s paralela à reta r e passando por P .

Um *teorema* é uma verdade que não se torna evidente senão por meio de uma prova.

Observação 1.1.3 Um teorema é composto de duas partes:

- 1ª. *Hipótese* — é o conjunto de suposições.

2ª. *Tese* — é a consequência que o raciocínio deduz da hipótese, por meio de verdades já conhecidas.

Exemplo 1.1.4 (Teorema de Pitágoras)¹ Em qualquer triângulo retângulo, a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos.

Um *lema* é um teorema auxiliar. Finalmente, um *corolário* é uma proposição que é uma consequência de um teorema previamente provado.

Esses agrupamentos de axiomas e postulados já eram conhecidos em Aristóteles² e em Euclides³ como noções comuns e postulados. A partir dessas afirmações e de um certo número de definições, Euclides demonstrou 465 teoremas em uma sequência lógica. Por exemplo, o quinto postulado de Euclides, em sua forma original, foi enunciado como:

E₅ — Se uma linha reta intercepta duas outras linhas retas formando ângulos interiores no mesmo lado menor do que dois ângulos retos, as duas linhas retas, se prolongadas indefinidamente, se interceptarão no lado em que a soma é menor que dois ângulos retos, confira Figura 1.1.

Proclus⁴ descreveu a controvérsia que estava se formando com relação a esse postulado mesmo nessa época, sendo ele próprio a favor da eliminação do postulado por classificá-lo de ingênuo, plausível e sem caráter de necessidade lógica.

No período Renascentista (séculos XV e XVI) iniciou-se novo período de controvérsias com relação ao quinto postulado a partir dos outros postulados, ou seja, demonstrá-lo a partir dos outros postulados e axiomas da geometria, usando princípios da lógica. Vamos dar uma pausa para relembrar a definição de retas paralelas.

¹ Pitágoras de Samos, 580-500, a.C., matemático e filósofo grego.

² Aristóteles, 384-322, a.C., filósofo grego.

³ Euclides de Alexandria, 330-260, a.C., matemático grego.

⁴ Proclus Lycaeus, 410-485, d.C., filósofo grego.

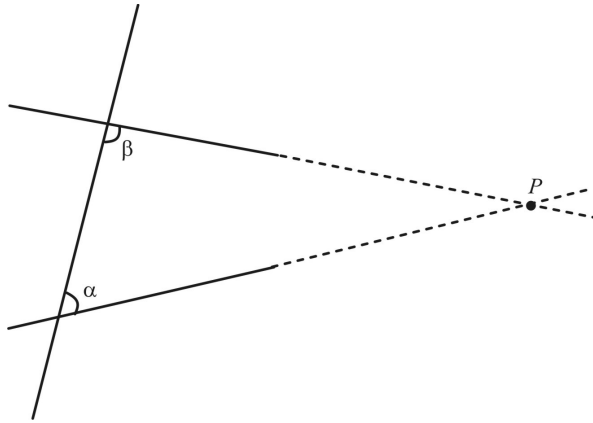


Figura 1.1. Quinto postulado de Euclides.

Duas retas distintas r e s , em Geometria Plana, são chamadas de *paralelas* se não se interceptam, isto é, $r \neq s$ e $r \cap s = \emptyset$. Assim, atualmente, o quinto postulado de Euclides é enunciado como:

E_5 — Dada uma reta r e um ponto P fora de r , existe uma e somente uma reta s que contém P e é paralela à reta r , confira Figura 1.2.

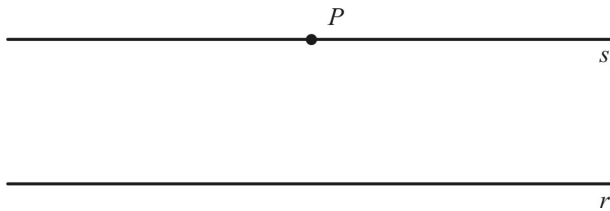


Figura 1.2. Geometria Euclidiana.

Note que esse postulado afirma que retas paralelas existem.

No século dezenove, Lobachevsky,⁵ em 1820, Gauss⁶ e Bolyai⁷ em 1823, descobriram que poderiam obter uma teoria matemática

⁵ Nikolai Ivanovich Lobachevsky, 1792-1856, matemático russo.

⁶ Carl Friedrich Gauss 1777-1855, matemático alemão.

⁷ János Bolyai, 1802-1860, matemático húngaro.

“consistente” partindo de um postulado que afirma a existência de infinidade de retas paralelas contendo P .

Postulado de Lobachevsky–Gauss–Bolyai. *Dada uma reta r e um ponto P fora de r , existem pelo menos duas retas s e t que contêm P e são paralelas à reta r .*

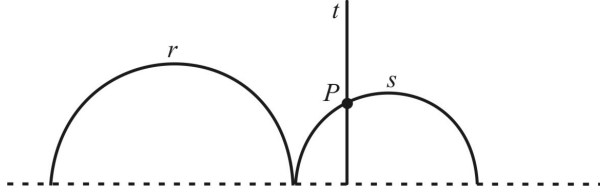


Figura 1.3. Geometria Hiperbólica.

Um “modelo” para esta geometria é dado pelo o semiplano $\mathbb{H}$, em que as retas são semirretas e semicírculos perpendiculares à reta que determina o semiplano, confira Figura 1.3.

Riemann⁸, descobriu uma nova geometria partindo de um postulado que nega a existência de retas paralelas.

Postulado de Riemann. *Duas retas nunca são paralelas.*

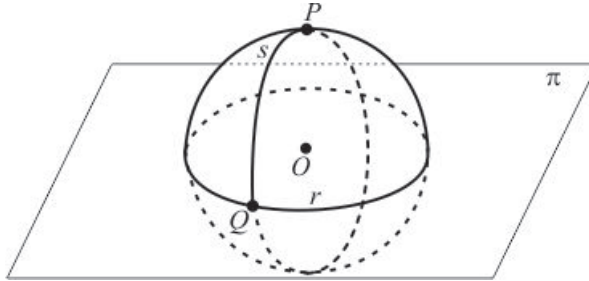


Figura 1.4. Geometria Esférica.

Um modelo para esta geometria é dado pela esfera S^2 , em que as retas são os círculos máximos, ou seja, as interseções de S^2 com os planos π contendo o centro de S^2 , confira Figura 1.4.

⁸ Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866, matemático alemão.

Com esses postulados, temos três tipos de geometrias. Em cada uma dessas geometrias, é claro que precisamos de muitos outros postulados.

Hilbert⁹, em 1899, no seu célebre trabalho “Fundamentos da Geometria”, apresenta a ideia de que apenas um nome — *axiomas* — deve ser usado com relação às proposições fundamentais, e de que certos termos básicos, como *ponto* e *reta*, são deixados completamente indefinidos.

Embora esse trabalho de Hilbert seja reconhecido por muitos como sendo o primeiro a tratar de método axiomático em sua forma moderna, devemos reconhecer que ideias análogas também apareceram em trabalhos de outros estudiosos da época.

Em 1882, apareceu a primeira edição do livro de Pasch¹⁰ “Vorlesungen über Neuere Geometrie.” Pasch baseou seu tratamento da geometria em um pequeno número de “conceitos nucleares” e “proposições nucleares”, que são introduzidas, respectivamente sem definição e sem demonstrações, mas que ele acredita terem uma base comum de aceitação pela nossa experiência. Depois que o sistema básico de proposições (axiomas) é introduzido, a dedução lógica das outras proposições do sistema é obtida de forma rigorosa. Suas ideias foram descritas por ele mesmo como segue:

Na realidade, se a geometria deve ser dedutiva, a dedução deve ser independente do significado dos conceitos geométricos, da mesma forma que deve ser independente de diagramas; somente as relações especificadas nas proposições e definições (teoremas) empregadas podem ser usadas. Durante a demonstração é útil e correto, mas de modo algum necessário, pensar no significado dos termos; aliás, se for necessário proceder desse modo a ineficiência da prova está clara. Se, entretanto, um teorema é rigorosamente derivado de um conjunto de proposições (os axiomas), a demonstração tem um valor que transcende o objetivo

⁹ David Hilbert, 1862-1943, matemático alemão.

¹⁰ Moritz Pasch, 1843-1930, matemático alemão.