

*Sobre a Teoria dos Números
Inteiros Algébricos*

COMISSÃO EDITORIAL:

Thiago Augusto Silva Dourado

César Polcino Milies

Carlos Gustavo Moreira

Fábio Maia Bertato

Willian Diego Oliveira

Gerardo Barrera Vargas

Richard Dedekind

SOBRE A TEORIA DOS NÚMEROS *Inteiros Algébricos*

Tradução e comentários:
Thiago Augusto S. Dourado
César Polcino Milies



LF Editorial
São Paulo — 2026

Copyright © 2026 LF Editorial

1a. Edição

Editor: VÍCTOR PEREIRA MARINHO / JOSÉ ROBERTO MARINHO

Projeto gráfico e diagramação: THIAGO AUGUSTO SILVA DOURADO

Capa: FABRÍCIO RIBEIRO

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Dedekind, Richard

Sobre a teoria dos números inteiros algébricos / Richard Dedekind; tradução e comentários Thiago Augusto S. Dourado, César Polcino Milies. -- São Paulo: LF Editorial, 2026. -- (Textuniversitários; 41)

Título original: Sur la théorie des nombres entiers algébriques.

ISBN 978-65-5563-779-3

1. Álgebra 2. Matemática 3. Teoria dos números I. Dourado, Thiago Augusto S. II. Milies, César Polcino. III. Título. IV. Série.

26-362076.0

CDD-512.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Teoria dos números : Matemática 512.7

Eliete Marques da Silva – Bibliotecária – CRB-8/9380

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei n. 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.

Impresso no Brasil

Printed in Brazil



www.lfeditorial.com.br

Visite nossa livreria no Instituto de Física da USP

www.livrariadafisica.com.br

Telefones:

(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP

(11) 3936-3413 | Editora



Richard Dedekind (1831–1916)

Introdução à edição brasileira

JULIUS WILHELM RICHARD DEDEKIND nasceu a 6 de outubro de 1831 em Brunswick (*Braunschweig*), capital do ducado do mesmo nome, na Baixa Saxônia. À época, Brunswick era um dos Estados constituintes da Confederação Germânica (*Deutscher Bund*), uma organização política que reunia 39 estados alemães entre 1815 e 1866, sucedendo ao Sacro Império Romano-Germânico.

Seu pai, Julius Levin Ulrich Dedekind, foi administrador do *Collegium Carolinum* em Brunswick, onde também era professor; sua mãe, Caroline Henriette Dedekind (nascida Emperius), era filha de um professor do *Collegium*.

O *Collegium Carolinum*, que fora fundado em 1745 e transformado na *Technische Universität Braunschweig* em 1862 — o mais antigo instituto tecnológico da Alemanha —, é uma instituição que teve um papel importante na vida de Dedekind. Também foi fundamental para uma das mais destacadas figuras da história da matemática, Carl Friedrich Gauss (1777–1855), que lá estudou e que também nasceu em Brunswick. Nas palavras do próprio Dedekind:

Sendo natural de Brunswick, ouvi falar de Gauss quando era jovem e fiquei feliz em acreditar em sua grandeza, sem compreender em que ela consistia. [10, vol. 2, p. 293]

Desde muito jovem, Dedekind demonstrou ter um ouvido musical extraordinário, manteve uma paixão pela música a vida toda e aprendeu a tocar piano e violoncelo.

I. Formação

Dedekind ingressou no *Gymnasium Martino-Katharineum* aos sete anos de idade. Lá, interessou-se por química e física enquanto permaneceu indiferente em relação à matemática. Porém, durante seus estudos, os argumentos empregados nessas disciplinas lhe pareceram pouco satisfatórios, ao passo que a pureza e o rigor dos métodos matemáticos acabaram por despertar-lhe o interesse.

Em 1848, aos dezesseis anos de idade, Dedekind ingressou no *Collegium Carolinum*, cujo nível, à época, situava-se entre o ensino secundário de nível médio e o universitário. Ali dominou os elementos da geometria analítica, da análise algébrica, do cálculo diferencial e integral e da mecânica superior, além de ter estudado ciências naturais.

Dedekind ingressou na Universidade de Göttingen, onde Gauss era professor, na Páscoa de 1850. Essa universidade ainda não era o centro de excelência que viria a se tornar anos depois. A direção do departamento de matemática estava a cargo de Moritz Abraham Stern (1807–1894) e Georg Ulrich (1798–1879), enquanto Wilhelm Eduard Weber (1804–1891) e Johann Benedict Listing (1808–1882) dirigiam o departamento de física. Weber era um físico experimental que, junto com Gauss, inventou o primeiro telégrafo eletromagnético, enquanto Listing havia feito seu doutorado orientado por Gauss e, incentivado por ele, publicou, em 1847, o livro *Vorstudien zur Topologie* (“Estudos Preliminares de Topologia”), que ajudou a introduzir o termo “topologia” no uso geral, embora o próprio Listing já tivesse usado esse termo em cartas uma década antes.

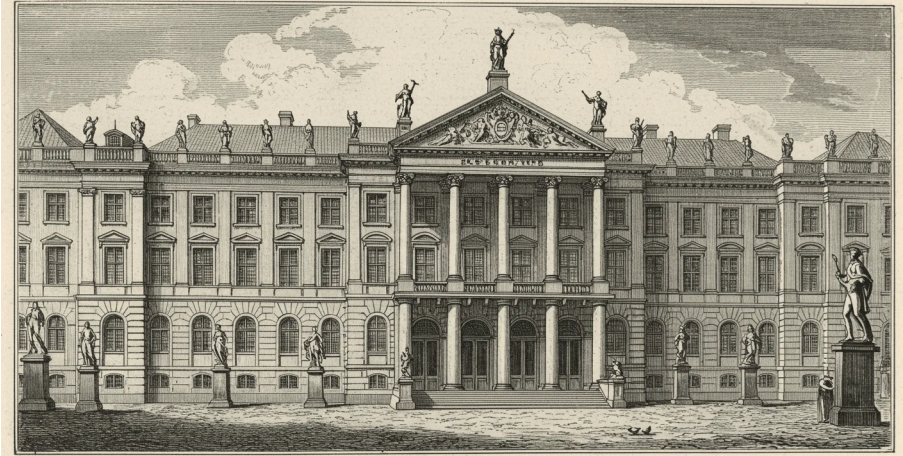


Figura 1: *Collegium Carolinum* de Brunswick nos tempos de Dedekind.



Figura 2: Universidade de Göttingen em meados do século XIX, nos tempos de Dedekind.

Os dois departamentos organizaram conjuntamente um seminário, do qual Dedekind participou desde seus primeiros anos na universidade. Foi por meio desse seminário que ele pôde ter contato com o assunto mais avançado então estudado em Göttingen: a teoria dos números.

Foi no semestre de outono de 1850 que Dedekind frequentou seu primeiro curso ministrado por Gauss, um curso sobre o método dos mínimos quadrados:

No início do semestre de inverno seguinte, considerei-me suficientemente maduro para assistir às suas aulas sobre o método dos mínimos quadrados e, assim, carregando o livro de presenças e com o coração palpitando, entrei em sua sala de estar, onde o encontrei sentado em sua escrivaninha. Ele não pareceu muito satisfeito com o meu anúncio, mas eu já tinha ouvido dizer que ele não gostava de dar aulas. Depois de assinar meu livro de presença, ele me disse, após um breve silêncio: “Talvez você já tenha ouvido falar que é sempre meio incerto se minhas aulas vão acontecer. Onde você mora? Na casa do barbeiro Vogel? Bem, isso é uma sorte, já que ele também é meu barbeiro. Eu aviso você por meio dele.” Alguns dias depois, Vogel, uma figura conhecida em toda a cidade, bastante orgulhoso da importância de sua missão, veio ao meu quarto para me avisar que vários outros alunos haviam se inscrito e que o Conselheiro Privado da Corte, Gauss, ministraria o curso. [10, vol. 2, pp. 293–294]

Dedekind segue descrevendo a forte impressão que o curso lhe causou:

Éramos nove alunos, e entre eles, aos poucos fui me aproximando de August Ritter e Moritz Cantor. Éramos todos assíduos, raramente alguém faltava, apesar do caminho até o Observatório ser, às vezes, desagradável durante o inverno. (O curso tinha duração de três horas por semana.) A sala de aula, separada do escritório de Gauss por uma antessala, era bem pequena. Sentávamo-nos em uma mesa que acomodava confortavelmente três pessoas de cada lado, mas não quatro. Gauss sentava-se em

frente à porta, na extremidade superior, a uma distância razoável da mesa; quando todos estávamos presentes, os dois últimos a chegar tinham de se sentar bem perto dele, com os cadernos no colo... Quando ele passava da explicação dos princípios ao desenvolvimento de fórmulas matemáticas, levantava-se e, com uma postura majestosa e muito ereta, escrevia em um quadro-negro ao seu lado com sua caligrafia peculiarmente bela, na qual sempre conseguia, por meio de economia e organização deliberada, aproveitar bem o espaço reduzido. Para os exemplos numéricos, cuja conclusão cuidadosa ele valorizava especialmente, trazia consigo os dados necessários em pequenos pedaços de papel... Posso apenas dizer que acompanhamos este excelente curso com um interesse cada vez maior, no qual também foram tratados diversos exemplos da teoria das integrais definidas. Parecia-nos que o próprio Gauss, apesar de anteriormente não demonstrar interesse em ministrar o curso, agora encontrava prazer em suas atividades de ensino. O curso terminou em 13 de março, quando ele se levantou, como todos nós, e nos despediu com algumas palavras amistosas: “Resta-me apenas agradecer a grande regularidade e a atenção com que acompanharam minhas aulas, provavelmente consideradas um tanto áridas.” Meio século se passou desde então, mas este curso, que ele afirmava ser árido, permanece inesquecível em minha memória e é um dos melhores que já acompanhei. [10, vol. 2, pp. 305–306]

Por outro lado, como observa Kurt-R. Biermann (1919–2002), historiador da ciência alemão, em *Dictionary of Scientific Biography* (“Dicionário de Biografias Científicas”):

A participação de Dedekind nas aulas sobre mínimos quadrados lhe serviu como “cartão de visita”. Ele deve ter causado boa impressão no Mestre, pois Gauss, não muito tempo depois, aceitou orientar sua tese de doutorado. [4, p. 2]

Dessa forma, Dedekind tornou-se o último orientando de Gauss. Apenas quatro semestres após o início de seus estudos, Dedekind concluiu seu doutorado com uma tese sobre integrais eulerianas, sobre a qual Gauss deu o seguinte veredito:

A memória preparada pelo Sr. Dedekind é fruto de uma pesquisa em cálculo integral, tema que está longe de ser trivial. O autor demonstra um sólido conhecimento dessas questões fundamentais, bem como uma independência de julgamento que, sem dúvida, são um bom presságio para o seu futuro. [3, p. 517]

Posteriormente, Dedekind lamentou que a instrução matemática disponível durante seus anos de estudante em Göttingen, embora adequada para os requisitos bastante baixos para um certificado de professor secundário estadual, estava deveras aquém de uma preparação adequada para uma carreira matemática. Assuntos de grande interesse à época não eram abordados, e ele teve de gastar dois anos de trabalho árduo após obter seu doutorado para aprender por conta própria assuntos como a teoria das funções elípticas, geometria moderna, álgebra superior e física matemática, tudo o que estava sendo brilhantemente ensinado em Berlim por Jacobi, Steiner e Dirichlet.

Bernhard Riemann (1826–1866) ingressou na Universidade de Göttingen na primavera de 1846. Seu pai o incentivou a estudar teologia, mas ele assistiu a algumas aulas de matemática e perguntou ao pai se poderia transferir-se para a faculdade de filosofia para poder estudar matemática. A permissão foi concedida e, então, Riemann passou a frequentar as aulas de matemática de Stern e Gauss e também realizou estudos na Universidade de Berlim a partir de 1847, onde estudou com Steiner, Jacobi, Dirichlet e Eisenstein.

De volta a Göttingen, ele obteve seu doutorado sob a orientação de Gauss, com uma tese sobre a teoria das funções complexas, na qual, entre outras coisas, obteve as *equações de Cauchy-Riemann*, que descrevem quando uma função de variável complexa é analítica, e ele

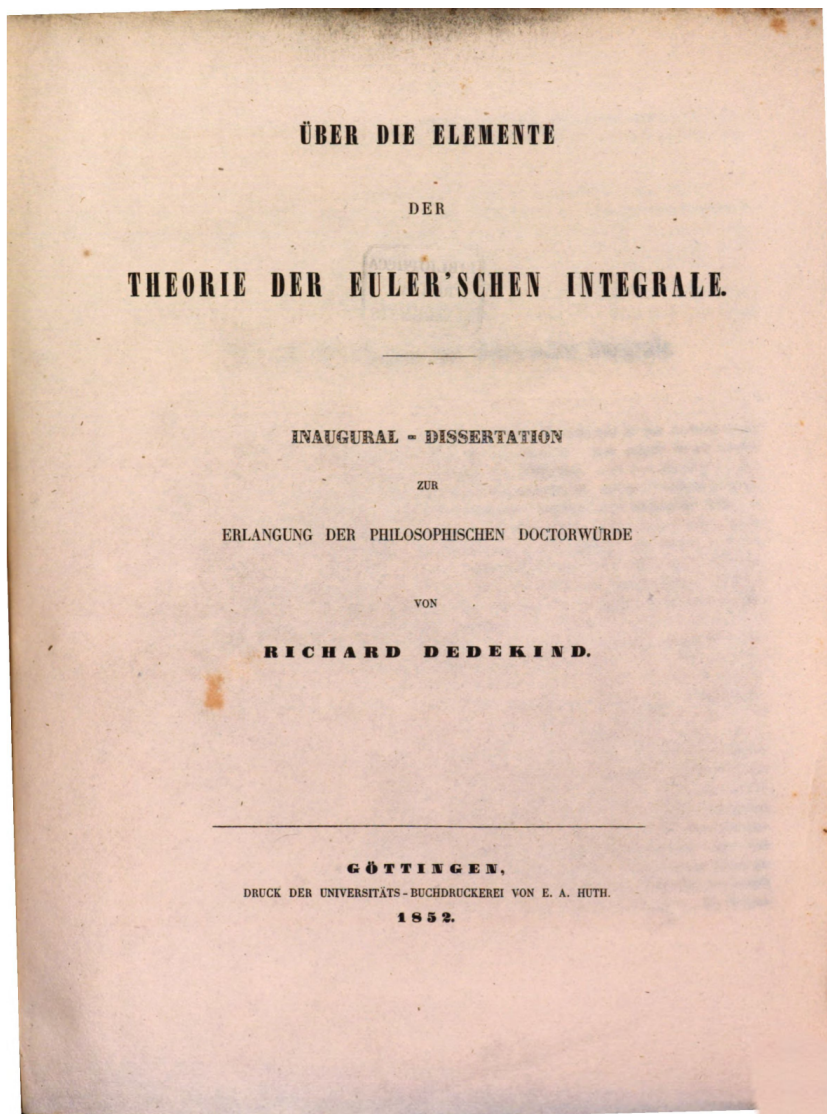


Figura 3: Capa da tese de Dedekind *Über die Theorie der Eulerschen Integrale* ("Sobre a Teoria das integrais Eulerianas"), defendida em 1852 na Universidade de Göttingen sob orientação de Carl Friedrich Gauss.

introduziu o conceito que mais tarde seria chamado de *superfícies de Riemann*.

Dedekind relata a influência que recebeu de Riemann em uma carta que escreveu a Rudolf Lipschitz (1832–1903) em 10 de junho de 1876:

Meus esforços em teoria dos números têm sido dirigidos para basear o trabalho não em representações ou expressões arbitrárias, mas em conceitos fundamentais simples e, assim — embora a comparação possa soar pretenciosa — alcançar na teoria dos números algo análogo ao que Riemann alcançou na teoria das funções, em conexão com a qual não posso suprimir a observação passageira de que os princípios de Riemann não estão sendo seguidos de maneira significativa pela maioria dos escritores — por exemplo, mesmo nas obras mais recentes sobre funções elípticas. Quase sempre eles prejudicam a pureza da teoria com a introdução desnecessária de formas de representação que deveriam ser resultados, e não ferramentas, da teoria. [10, vol. 3, pp. 468–469]

Assim como Dedekind, Riemann também achava que o ensino de matemática em Göttingen era direcionado a alunos que pretendiam se tornar professores do ensino secundário e não àqueles que desejavam continuar em carreiras de pesquisa. Em 1854, ambos — Riemann e, algumas semanas depois, Dedekind — obtiveram seus títulos de *habilitação* (*Habilitation*). Dedekind, então, começou a lecionar em Göttingen como *Privatdozent*, ministrando cursos sobre probabilidade e geometria.¹

¹ No contexto das universidades alemãs do século XIX, a *Habilitation* (do latim *habilitas*, “capacidade” ou “idoneidade”) era um processo acadêmico de pós-doutorado que conferia ao candidato o direito de ensinar (*venia legendi*) em uma universidade como professor privado (*Privatdozent*), sendo o passo fundamental para a carreira docente e, posteriormente, para o acesso a uma cátedra (professor titular). Após o doutorado, o pesquisador precisava apresentar uma tese de *Habilitation* (*Habilitationsschrift*) — uma segunda obra original de fôlego, geralmente mais ampla e aprofundada que a tese de doutorado — e submetê-la a um rigoroso exame público ou colóquio perante a faculdade. A aprovação dava o direito de ministrar cursos,

No semestre de inverno de 1855–1856 e no seguinte, Dedekind acompanhou um curso sobre funções abelianas e elípticas ministrado por Riemann. A esse respeito, ele escreveu à família:

Além disso, mantenho bastante contato com meu brilhante colega Riemann, que é sem dúvida o matemático vivo mais profundo depois de Dirichlet, ou até mesmo igual a ele, e em breve será reconhecido como tal, se sua modéstia lhe permitir publicar certas coisas que, reconhecidamente, serão de início compreensíveis apenas para alguns. [35, p. 37]

Assim, embora já fosse professor, ele também continuou a ser um estudante dedicado.

Suas próprias aulas nessa época são notáveis pelo fato de ele provavelmente ter sido o primeiro professor universitário a lecionar sobre a teoria de Galois, em um curso no qual o conceito de *corpo* foi introduzido. De fato, poucos alunos assistiam às suas aulas. Conforme nos relata Biermann [4, p. 2], apenas dois alunos estavam presentes quando Dedekind avançou além do trabalho de Galois e substituiu o conceito de grupo de permutações pelo *conceito abstrato de grupo*.

Gauss faleceu a 23 de fevereiro de 1855, e Lejeune Dirichlet (1805–1859) foi nomeado para ocupar a cadeira vaga em Göttingen. Ele é conhecido principalmente por suas contribuições à teoria dos números. Seu primeiro artigo publicado fornece uma demonstração do Último Teorema de Fermat para o caso $n = 5$; os casos $n = 3$ e $n = 4$ tinham sido demonstrados por Euler e Fermat, respectivamente. Nessa área, ele é mais conhecido por ter provado que *uma progressão aritmética em que o primeiro termo é primo com a razão contém infinitos números primos*. É considerado o criador da teoria analítica dos números. Na área da análise matemática, ele

sem, contudo, garantir salário fixo nem tampouco vínculo empregatício garantido, a remuneração do *Privatdozenten* geralmente vinham de taxas de estudantes ou contratos temporários para projetos ou substituições. Atualmente, o *Privatdozent* pode usar o título vitaliciamente e concorrer a vagas de professor titular (W2/W3), embora o modelo de habilitação esteja sendo gradualmente substituído por *junior professorships* em algumas áreas.



Figura 4: Johann Carl Friedrich Gauss.



Figura 5: Georg Friedrich Bernhard Riemann.

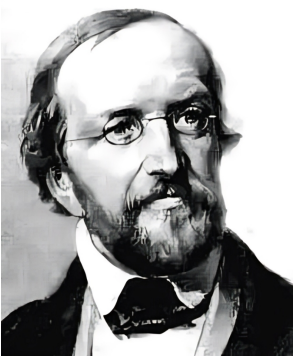


Figura 6: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet.



Figura 7: Julius Wilhelm Richard Dedekind.

desenvolveu a teoria das *séries de Fourier* e foi o primeiro a apresentar a definição formal moderna do conceito de *função*.

A ida de Dirichlet para Göttingen foi muito importante para Dedekind, que considerou o trabalho com Dirichlet extremamente proveitoso. Ele frequentou seus cursos sobre teoria dos números, teoria do potencial, integrais definidas e equações diferenciais parciais. Dedekind e Dirichlet logo se tornaram amigos próximos, e essa relação foi, em muitos aspectos, fundamental para a formação de Dedekind, cujos interesses matemáticos ganharam um novo fôlego com as discussões entre os dois. Paul Bachmann (1837–1921), que era estudante em Göttingen nessa época, lembrou, anos mais tarde, que só conhecia Dedekind de vista, pois Dedekind sempre chegava e saía com Dirichlet, sendo completamente ofuscado por ele [17, p. 10]. O próprio Dedekind, em uma carta de julho de 1856 descreve como a presença de Dirichlet fez uma grande diferença:

O que mais me é útil é a convivência quase diária com Dirichlet, com quem estou começando a aprender de fato pela primeira vez; ele é sempre completamente amável comigo, e me diz sem rodeios quais lacunas preciso preencher e ao mesmo tempo me dá as instruções e os meios para fazê-lo. Já lhe devo infinitas coisas, e sem dúvida haverá muitas mais. [35, p. 35]

Dirichlet era casado com Rebecka Mendelssohn, neta do filósofo Moses Mendelssohn e irmã do célebre compositor Felix Mendelssohn. Eles tinham um grande círculo de amigos e, sempre que recebiam visitas de Berlim, Dedekind também era convidado e desfrutava, assim, de agradável convivência social.

II. A vida em Zurique

Em 1855, Joseph Ludwig Raabe (1801–1859) foi nomeado professor do recém-fundado *Polytechnikum* de Zurique, na Suíça (agora o *Eidgenössische Technische Hochschule* — ETH Zurique). Quando se retirou, Dedekind se candidatou a ocupar a cátedra, e Dirichlet

apoiou sua candidatura, escrevendo que Dedekind era “um pedagogo excepcional”. Na primavera de 1858, o conselheiro suíço responsável pelas nomeações visitou Göttingen; Dedekind foi rapidamente escolhido para o cargo e começou a lecionar lá no outono de 1858.

Quando chegou a Suíça, a direção do *Polytechnikum* pediu-lhe que preparasse um curso de introdução ao Cálculo Diferencial. À época, este ramo da matemática não tinha o mesmo nível de rigor que era usual em outras áreas. Em 1817, no seu *Rein analytischer Beweis*, o padre tcheco Bernard Bolzano (1781–1848) explicitou precisamente o conceito de continuidade de uma função. Ainda não havia uma definição precisa de número real. No seu *Cours d'Analyse* (“Curso de Análise”), de 1821, Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) afirma, sem demonstração, que todo número irracional pode ser representado como o limite de uma sequência de números racionais e, a meados da década de 1830, Bolzano colocou explicitamente a necessidade de uma definição rigorosa do conjunto dos números reais.

Ao se preparar para lecionar cálculo diferencial e integral pela primeira vez, Dedekind deparou-se com o problema do tratamento impreciso dos números reais, e foi então que surgiu o conceito dos *cortes de Dedekind*, fornecendo, assim, um modelo para os números reais. Segundo suas próprias palavras:

As considerações que formam o objeto deste opúsculo datam do outono de 1858. Eu era então professor na Escola Politécnica de Zurique e encontrei-me pela primeira vez obrigado a lecionar sobre os elementos do cálculo diferencial; senti-me mais fortemente do que nunca confrontado com a falta de uma verdadeira fundamentação científica da aritmética... Este sentido de insatisfação era tão intenso que decidi meditar na questão até poder encontrar uma fundamentação puramente aritmética e perfeitamente rigorosa para os princípios da análise infinitesimal. [20, pp. 71–72]

A brilhante ideia de Dedekind foi representar os números reais por meio de divisões dos números racionais em dois conjuntos. Ele

observou que qualquer número racional α produz uma partição do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais em duas classes A_1 e A_2 , de tal forma que todo elemento a_1 da classe A_1 é menor do que todo elemento a_2 da segunda classe A_2 . O número α é o maior número da classe A_1 ou o menor da classe A_2 .

Inspirado nesta observação, ele define um corte como uma classificação dos números racionais em duas classes A_1 e A_2 tais que:

- (i) Nenhuma das duas classes é vazia.
- (ii) Todo elemento da primeira classe é menor que todo elemento da segunda.
- (iii) Todo número racional pertence a uma e só uma das classes.

Então Dedekind propõe:

Assim, sempre que temos um corte (A_1, A_2) não produzido por um número racional, criamos um novo número, um número irracional α , que consideramos como completamente definido por este corte (A_1, A_2) ; diremos que o número α corresponde a este corte, ou que produz este corte. Por isso, de agora em diante, a cada corte bem definido corresponde um número racional ou irracional bem definido, e consideramos dois números como diferentes ou desiguais se e só se eles correspondem a cortes essencialmente diferentes. [20, p. 83]

Este trabalho representou a continuação do trabalho de Cauchy, Gauss e Bolzano, no sentido de eliminar sistematicamente a falta de clareza nos conceitos básicos por meio de métodos de demonstração com um nível mais elevado de rigor. Sua definição de número real é considerada, até hoje, a melhor das várias existentes. Vale observar que Dedekind reconhece que outros autores teriam chegado às mesmas ideias independentemente. Em suas próprias palavras:

A mesma teoria dos números irracionais, fundada no fenômeno dos cortes, é estabelecida na "Introduction à la théorie des

fonctions d'une variable" de J. Tannery (Paris, 1886). Se bem compreendo uma passagem no prefácio deste trabalho, o autor pensou a sua teoria independentemente, isto é, numa altura em que não apenas o meu artigo mas também o "Fondamenti" de Dini mencionado no mesmo prefácio lhe eram desconhecidos. Esta concordância parece-me uma prova gratificante de que a minha concepção está conforme com a natureza do assunto, um fato que é reconhecido por outros matemáticos, por exemplo, por Pasch no seu "Einleitung in die Differential-und Integral-rechnung" (Leipzig, 1883). [20, p. 99]

Ainda em relação aos conjuntos numéricos, vale mencionar um notável trabalho posterior de Dedekind, publicado em 1888, quando já retornara a Brunswick, intitulado *Was sind und was sollen die Zahlen?* ("O que são e para que servem os Números?") [20, pp. 93–164], cuja publicação esteve sob a égide da filosofia que ele descreve logo no primeiro parágrafo de seu prefácio:

Não se deve aceitar na ciência o que é demonstrável sem demonstração. Por mais evidente que pareça essa exigência, segundo creio, não se pode considerá-la satisfeita nem sequer na fundamentação da ciência mais simples, a saber, aquela parte da lógica que trata da teoria dos números, nem mesmo nas exposições mais recentes. [10, vol. 3, p. 335]

A partir da publicação do artigo sobre os cortes, em 1872, o conceito de número real podia ser considerado bem fundamentado quando construído a partir do conjunto dos números racionais. A construção dos racionais a partir dos números naturais era bem conhecida, mas ainda faltava uma apresentação rigorosa destes últimos. Essa é a tarefa que Dedekind assumiu nesse novo trabalho. Ele começou tratando de generalidades sobre conjuntos, operações com conjuntos (união, intersecção e suas propriedades) e funções ou aplicações. Como observamos acima, seu amigo Dirichlet foi o primeiro a dar uma definição rigorosa do conceito de função, mas a definição de Dedekind pode ser considerada mais abstrata, uma