
Introdução à Mecânica Quântica

conceitos fundamentais e aplicações

Volume 2



CONSELHO EDITORIAL DA LF EDITORIAL

Amílcar Pinto Martins – Universidade Aberta de Portugal

Arthur Belford Powell – Rutgers University, Newark, USA

Carlos Aldemir Farias da Silva – Universidade Federal do Pará

Emmánuel Lizcano Fernandes – UNED, Madri

Iran Abreu Mendes – Universidade Federal do Pará

José D'Assunção Barros – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Luis Radford – Universidade Laurentienne, Canadá

Manoel de Campos Almeida – Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Maria Aparecida Viggiani Bicudo – Universidade Estadual Paulista – UNESP/Rio Claro

Maria da Conceição Xavier de Almeida – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Maria do Socorro de Sousa – Universidade Federal do Ceará

Maria Luisa Oliveras – Universidade de Granada, Espanha

Maria Marly de Oliveira – Universidade Federal Rural de Pernambuco

Raquel Gonçalves-Maia – Universidade de Lisboa

Teresa Vergani – Universidade Aberta de Portugal

Introdução à Mecânica Quântica

conceitos fundamentais e aplicações

Volume 2

José Roberto Pinheiro Mahon

Instituto de Física Armando Dias Tavares
Universidade do Estado do Rio de Janeiro



2026

Copyright © 2026 o autor
1ª Edição

Direção editorial: Victor Pereira Marinho e José Roberto Marinho

Capa: Fabrício Ribeiro

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Mahon, José Roberto Pinheiro
Introdução à mecânica quântica: conceitos fundamentais e aplicações: volume 2 /
José Roberto Pinheiro Mahon. – São Paulo: LF Editorial, 2026.

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-796-0

1. Física 2. Mecânica quântica I. Título.

26-374161.0

CDD-530.12

Índices para catálogo sistemático:
1. Mecânica quântica: Física 530.12

Eliete Marques da Silva - Bibliotecária - CRB-8/9380

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida
sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.
Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107
da Lei Nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998



EDITORIAL

LF Editorial

www.livrariadafisica.com.br

www.lfeditorial.com.br

(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP

(11) 3936-3413 | Editora

A meus pais, José e Zélia.

A Geisa, com amor e sempre presente.

A meus mestres,

Armando Turtelli Jr.,

Carlos Ourivio Escobar e

Cesare Mansueto Giulio Lattes.

Sobre o Autor



José Roberto Pinheiro Mahon, nascido em Bauru, no Estado de São Paulo, em 1955, é professor e pesquisador do Departamento de Física Nuclear e Altas Energias, no Instituto de Física Armando Dias Tavares da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ). Graduado em matemática e tecnologia mecânica em Sorocaba (FAFI e FATEC-UNESP), fez seu mestrado em física na Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e obteve seu doutorado em física pela Universidade de São Paulo (USP). Com formação científica na área de física de partículas e campos, desenvolveu pesquisas em física experimental de altas energias e trabalhou em colaborações internacionais tanto no Fermilab, Estados Unidos, como no CERN, na Europa. Atualmente dedica-se as teorias clássica e quântica de campos e fundamentos de física (eletromagnetismo, mecânica quântica e mecânica estatística). Publicou mais de 135 trabalhos em periódicos científicos internacionais, além de apresentações em congressos internacionais. Orienta alunos de graduação e de pós-graduação. É coautor dos livros *Estimativas e erros em experimentos de Física*, já na terceira edição (2013) publicado pela EdUERJ e *Introdução à QCD perturbativa* (2013) publicado pela LTC Editora, é autor dos livros *Mecânica Quântica - desenvolvimento contemporâneo com aplicações* (2011) também publicado pela LTC Editora, *Mecânica Clássica - fundamentos teóricos e aplicações* (2020), *Teoria do Campo Eletromagnético e da Relatividade* (2021) e *Mecânica Estatística - desenvolvimento teórico e suas aplicações* (2024) publicados pela Editora Livraria da Física.

Prefácio

A mecânica quântica é um dos pilares fundamentais da física moderna. Forma com a mecânica clássica, o eletromagnetismo e a mecânica estatística a base fundamental na formação de um físico. Este texto está baseado em um curso de pós-graduação em mecânica quântica que ministrei nos últimos anos no INSTITUTO DE FÍSICA DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO.

O objetivo do texto é apresentar a mecânica quântica numa forma moderna, desde os conceitos fundamentais, passando pelas ferramentas matemáticas da mecânica quântica, a dinâmica quântica, a equação de onda de Schrödinger – Fundamentos e Aplicações, método WKB, integrais de caminho de Feynman, propriedades gerais do *momentum* angular, espalhamento e simetrias, teorema de Bell e suas consequências, até as equações relativísticas. Ainda incluímos vários exemplos atuais, suas aplicações (técnico - científica) e experimentos recentes. Tento colocar no texto as informações que deverão ser úteis aos estudantes que irão utilizá-lo. Os tópicos introduzidos são tratados de forma compreensiva, procurando-se expor claramente as deduções dos principais resultados. Espera-se que o estudante tenha familiaridade com o material básico de um curso de estrutura da matéria (um ano) e mecânica analítica (nível de graduação), bem como de álgebra linear e de física matemática abordados nos cursos de Física.

Neste texto, os temas da mecânica quântica foram divididos em 15 capítulos, distribuídos em dois volumes. No volume 1, temos: Introdução aos Conceitos Fundamentais; Ferramentas Matemáticas da Mecânica Quântica; Dinâmica Quântica; A Equação de Schrödinger - Teoria e Aplicações; Método de Aproximação WKB; Integrais de Caminho de Feynman; Teoria do *Momentum* Angular e Propriedades Gerais; Espalhamento. No volume 2, temos: Simetrias na Mecânica Quântica; Emaranhamento Quântico, EPR, Teorema de Bell e Suas Consequências; Métodos de Aproximação - Métodos Perturbativos; Teoria Formal do Espalhamento; Partículas Idênticas; Quantização do Campo Eletromagnético e Equações Relativísticas. Este texto poderá ser usado por estudantes avançados de graduação e por estudantes de pós-graduação, além de ser usado para consultas e preparação de tópicos especiais.

Agradecimentos Desejo agradecer aos estudantes que proporcionaram a motivação para escrever este texto. Em especial André Calvet Correa solucionando problemas em teoria de perturbação e colisões, Ana Thereza Bastos Garcia da Rosa desenvolvendo através das integrais de caminho o problema do oscilador harmônico forçado, Alan Guzmán colaborando com teoria de gauge e monopolos magnéticos, Márcio Capri (hoje professor do Instituto de Física da Universidade do Estado do Rio de Janeiro) que solucionou os problemas propostos durante o período em que foi meu monitor no curso de graduação, Jordan Martins que propôs problemas interessantes quando foi meu estudante de graduação, André Sá de Mattos e Tais Dias Izidoro que estudaram com detalhes a solução do oscilador harmônico usando as funções hipergeométricas, além de Marcello Fernandes Malvão Luciano pela discussões dos fundamentos da mecânica quântica.

Agradeço também aos colegas docentes do Instituto que incentivaram na preparação deste trabalho. Em especial aos Profs. José Umberto Cinelli Lobo de Oliveira (já falecido), pelas discussões dos aspectos fundamentais da mecânica quântica e valiosa ajuda na apresentação do texto; Vitor Oguri, pelas valiosas sugestões, discussões dos aspectos fundamentais, conceituais e da matemática usada na mecânica quântica, longas horas de discussão sobre os experimentos básicos e suas interpretações. Também um agradecimento especial ao Prof. Cesar Linhares pelas discussões sobre WKB e das interpretações da mecânica quântica relativística e propagadores de Feynman. Minhas longas conversas com esses amigos e colegas de trabalho foram um grande estímulo para realização deste novo texto de mecânica quântica. Finalmente, um agradecimento especial ao Eduardo de Mattos pela realização e cuidado com as figuras.

UERJ, Rio de Janeiro, 2026.

J. R. P. Mahon

Sumário

Prefácio	ix
9 Simetrias na Mecânica Quântica	1
9.1 Simetrias na Física Clássica e Quântica	1
Simetrias na Mecânica Clássica	1
Simetrias na Mecânica Quântica	5
Degenerescências	8
Simetria $SO(4)$ no Potencial de Coulomb	9
9.2 Simetria Discreta, Paridade ou Inversão Espacial	12
Paridade Intrínseca	15
Não Conservação da Paridade	17
Decaimento Não Leptônico $\Lambda \rightarrow p + \pi^-$	19
9.3 Poço Duplo Simétrico	20
A Molécula de Amônia	23
9.4 Translação na Rede como Simetria Discreta	24
9.5 Simetria Discreta, Inversão Temporal	28
Sistema com $Spin$	32
Degenerescência de Kramers	32
Problemas	33
Leitura Recomendada	35
10 Emaranhamento Quântico, EPR, Teorema de Bell e Suas Consequências	36
10.1 Apresentando o Emaranhamento Quântico	36
Estados Emaranhados de Dois Sistemas de $Spin \frac{1}{2}$	38
Emaranhamento entre Sistemas mais Gerais	40
Medição Ideal e Estados Emaranhados	43
Experimento “Qual Caminho”	49
10.2 Paradoxo de Einstein, Podolsky e Rosen	51
10.3 Teorema de Bell	54
10.4 Desigualdade CHSH	57
Derivação da Desigualdade de Clauser e Horne	58
Violação dessa Desigualdade pela Mecânica Quântica	59
10.5 Experimento de Aspect	59
10.6 Teoria das Variáveis Ocultas Não Locais	61
Experimento de Zeilinger	69

10.7	Emaranhamento e Decoerência	72
10.8	Estados Tripartite <i>GHZ</i>	76
10.9	Teleportação e Criptografia Quântica	79
	Informação Quântica	79
	Codificação Superdensa	80
	Teleportação Quântica	81
	Criptografia Quântica	86
10.10	Computação Quântica	87
	<i>Bit</i> Quântico	88
	Portas Quânticas	90
	Algoritmos Quânticos	93
	Problemas	103
	Leitura Recomendada	104
11	Métodos de Aproximação – Métodos Perturbativos	105
11.1	A Série Perturbativa	105
11.2	Equações da Série Perturbativa	107
	Perturbação – Caso Não Degenerado	108
	Perturbação – Caso Degenerado	112
11.3	Perturbação – Observações	116
11.4	Aplicações	118
	Partícula de <i>Spin</i> $\frac{1}{2}$ em um Campo Magnético	118
	Efeito Stark	119
	Átomos Hidrogenoides: Estrutura fina e Efeito Zeeman	128
11.5	Método Variacional	134
	Aspectos Teóricos	134
	Método de Rayleigh-Ritz	135
	Átomo de Hidrogênio	136
	Oscilador Duplo	136
11.6	Método de Transformações Canônicas	142
11.7	Equação de Movimento – Potenciais Dependentes do Tempo	144
	Representação de Interação	144
	Sistema de Dois Níveis Dependente do Tempo	146
	Ressonância Magnética – Parte 2	149
	Ressonância Magnética Nuclear	150
11.8	Teoria de Perturbação Dependente do Tempo	151
	Séries de Dyson	151
	Probabilidade de Transição	152
	Perturbação Constante	154
	Regra de Ouro de Fermi	155
	Perturbação Harmônica	156
11.9	Campo Clássico de Radiação	157
	Absorção e Emissão Induzida	157
	Aproximação Dipolo Elétrico	160
	Efeito Fotoelétrico	163
11.10	Vida-média dos Estados Excitados	165
	Aproximação Dipolo Elétrica	169
11.11	Aproximação Adiabática	169

A Fase de Berry	171
Efeito Aharonov-Bohm Revisado	172
11.12 Teoria de Resposta Linear	173
Perturbação por um Agente Externo	173
Perturbação por um Campo Clássico	173
Primeira Ordem de Perturbação	174
11.13 Funções de Correlação	175
11.14 Teorema de Flutuação-Dissipação	177
Relação entre $\Phi_{BA}(\omega)$ e $\Psi_{BA}(\omega)$	178
Relação entre $\chi(\omega)$ e $\Phi_{BA}(\omega)$	178
11.15 Regra de Soma	182
Problemas	183
Leitura Recomendada	188
12 Teoria Formal do Espalhamento	189
12.1 Equação de Lippmann-Schwinger	189
12.2 Espalhamento – Função de Green – Parte 2	191
12.3 Aproximação de Born – Termos de Ordem Superiores	193
12.4 Fórmula de Gell-Mann e Goldberger para Dois Potenciais	195
12.5 Matriz S de Espalhamento	197
12.6 Invariância Rotacional e Matriz S	200
12.7 Teorema Óptico – Demonstração Formal	202
12.8 Simetria de Reversão Temporal	204
12.9 Espalhamento via Integrais de Caminho	204
Teoria de Perturbação	204
Potencial de Espalhamento	208
Método de Faddeev-Popov para a Matriz T	212
Representação Eikonal da Matriz T	214
Problemas	218
Leitura Recomendada	219
13 Partículas Idênticas	221
13.1 Partículas Idênticas – Definição	221
Partículas Idênticas na Mecânica Clássica	221
Partículas Idênticas na Mecânica Quântica	222
13.2 Operadores de Permutação	226
Sistema de Duas Partículas	226
Sistema Contendo um Número Arbitrário de Partículas	229
13.3 Postulado da Simetrização	233
Enunciado do Postulado	233
Remoção da Degeneração da Troca	234
Construção dos <i>Kets</i> Físicos	234
13.4 Discussão	239
Diferenças entre Bósons e Fermions	239
As Consequências da Indistinguíbilidade de Partículas no Cálculo de Previsões Físicas	241
13.5 Alguns Efeitos Observados Devidos à Indistinguíbilidade	247
13.6 Correlação Espacial entre as Partículas	249
Partículas Distinguíveis	249

Bósons ou Férmions	250
Molécula de Hidrogênio	251
13.7 Átomo de Hélio	251
Estado Fundamental	251
Estados Excitados	253
13.8 Tabela Periódica	254
13.9 Aproximação de Thomas-Fermi	256
13.10 Método de Hartree-Fock	260
13.11 Interação de Troca – Hamiltoniana de Heisenberg	262
13.12 Espalhamento de Partículas Idênticas – Parte 2	263
13.13 Estados Coletivos de Férmions	265
Gás de Fermi a Temperatura Zero	265
Operadores de Criação e de Aniquilação	267
Operadores de Campo e Hamiltoniana	269
Outras Formas da Hamiltoniana	272
13.14 Estados Coletivos de Bósons	275
Condensação de Bose-Einstein	275
Equação de Gross-Pitaevskii	277
Aproximação de Bogoliubov	282
Problemas	285
Leitura Recomendada	286
14 Quantização do Campo Eletromagnético	287
14.1 Partícula Carregada em um Campo Eletromagnético	287
14.2 Transformação de Galileu e Invariância de Calibre	290
14.3 Partículas de $Spin \frac{1}{2}$ em um Campo Eletromagnético	293
14.4 Partículas de $Spin \frac{1}{2}$ em um Campo Magnético Uniforme Constante	294
Níveis de Landau	296
Efeito Hall Quântico	296
14.5 Simetria de Calibre Local	298
14.6 Quantização do Campo Eletromagnético Livre	301
Energia do Campo Livre	304
<i>Momentum</i> do Campo Livre	306
<i>Momentum</i> Angular do Campo Livre	308
Flutuações Quânticas do Campo Eletromagnético	311
14.7 Interação com um Sistema de Partículas Carregadas	314
14.8 Estados Coerentes e Óptica Quântica	321
14.9 Estados de um Simples Fóton	325
Estado de um Fóton	325
Verificação Experimental do Estado de um Fóton	326
14.10 Medição de Não Demolição Quântica – Medição <i>QND</i>	327
Condições para Medições <i>QND</i>	328
Medição <i>QND</i> do Número de Fótons via Efeito Kerr Óptico	329
Medição <i>QND</i> do Número de Fótons por Acoplamento Dispersivo Átomo-Campo	331
Registro do Nascimento e da Morte de um Fóton em uma Cavidade	337
Efeito Zeno Quântico	338
Problemas	342
Leitura Recomendada	343

15 Equações Relativísticas	344
15.1 Transformações de Lorentz	344
Postulado 1 (Postulado de Relatividade – Primeiro)	344
Postulado 2 (Postulado da Constância da Velocidade da Luz)	345
Quadrivetores	347
Intervalo Invariante e Tempo Próprio	347
15.2 Grupos de Lorentz e de Poincaré	348
Grupos $O(3, 1)$ e $SO(3, 1)$	350
Grupo $SL(2, \mathbb{C})$	352
Grupo de Poincaré	354
15.3 Campos Escalares e Tensores	355
15.4 Dinâmica Relativística	356
15.5 Eletrodinâmica na Forma Covariante	356
15.6 Equação de Klein-Gordon	359
15.7 Equação de Dirac	362
Spinors de Weyl	366
Forma Covariante da Equação de Dirac e Matrizes γ	367
Equação Adjunta	368
15.8 Equação de Dirac e o <i>Spin</i> do Elétron	369
15.9 Solução para Partícula Livre	370
Interpretação da Energia Negativa	371
Helicidade	373
Conjugação de Carga	374
15.10 Elétron em um Campo Eletromagnético	375
15.11 Covariância Relativística da Equação de Dirac	376
Rotações de um Ângulo θ em Torno do Eixo z	378
Transformação de Lorentz Pura	378
15.12 Transformações Bilineares	379
Inversão Temporal	381
15.13 Forças Centrais e o Átomo de Hidrogênio	382
Simetrias	382
Estrutura das Soluções da Equação de Dirac	383
Equações Radiais	384
O Átomo de Hidrogênio	386
Espectro Discreto ou Estados Ligados ($E < m_e c^2$)	387
Espectro Contínuo ($E > m_e c^2$)	390
15.14 Propagadores de Feynman	391
Campos Clássicos	391
Campo de Klein-Gordon no Espaço-Tempo	392
Campo Eletromagnético	396
Campo de Dirac	397
15.15 Propagadores de Feynman via Integrais de Caminho	400
Campo Escalar	400
Campo Eletromagnético	406
Campo de férmions	409
Problemas	412
Leitura Recomendada	413

Bibliografia	414
Índice	418

Capítulo 9

Simetrias na Mecânica Quântica

As leis de conservação de energia, *momentum* linear e *momentum* angular são válidas tanto na mecânica clássica como na mecânica quântica e resultam da invariância da teoria em relação às operações de translações no tempo e no espaço e em relação às rotações.¹ Essas leis estão portanto ligadas a princípios de invariância ou de simetria.

9.1 Simetrias na Física Clássica e Quântica

Simetrias na Mecânica Clássica Em 1918, Emmy Noether² demonstrou que as *leis de conservação da física* estão relacionadas com *simetrias*, i.e., para cada simetria da lagrangiana corresponde uma lei de conservação (e vice-versa). Quando a lagrangiana L é invariante sob uma translação temporal, ou uma translação do espaço, ou uma rotação espacial, as leis de conservação que estão envolvidas são a energia, o *momentum* linear, ou o *momentum* angular, respectivamente.

Seja a transformação no espaço de configuração

$$q_j \rightarrow q'_j = (h(\epsilon_i) q)_j, \quad (9.1)$$

em que $h(\epsilon_i)$ é um operador $M \xrightarrow{h} M$ (M espaço de configuração), o qual depende continuamente de p parâmetros $\epsilon_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, p$. Dizemos que h é uma simetria se deixa invariante as equações de movimento. A seguir, consideremos transformações infinitesimais, e manteremos em primeira ordem nos parâmetros $\epsilon_i \equiv d\epsilon_i$. Levamos a convenção de que para $\epsilon_i = 0$, a transformação é a identidade e designamos por $\delta L = L(q', \dot{q}', t) - L(q, \dot{q}, t)$.

Casos:

- $\delta L = 0$.

Temos

$$(h(\epsilon_i) q)_j = q_j + \delta q_j \quad \text{em que} \quad \delta q_j = \sum_i \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_i} q \right)_j d\epsilon_i.$$

¹ Ver H. Goldstein, *Classical mechanics* (1980); L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics* (1993), J. J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern quantum mechanics* (2021); L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum mechanics* (1989).

² *Amalie Emmy Noether (1882-1935)*, matemática alemã.

Desenvolvendo δL , temos

$$\begin{aligned}\delta L &= \sum_{j,i} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_i} q \right)_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_i} q \right)_j \right] d\epsilon_i \\ &= \sum_{j,i} \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_i} q \right)_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_i} q \right)_j \right] d\epsilon_i \\ &= \sum_{j,i} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_i} q \right)_j \right] d\epsilon_i = 0.\end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_i} q \right)_j = \text{constante}, \quad (9.2)$$

em que temos $i = 1, 2, \dots, p$ constantes de movimento.

- $\delta L = \frac{d\delta F}{dt}$, $\delta F = F_i d\epsilon_i$.

É claro, pelo desenvolvimento anterior, que:

$$\delta L = \frac{d\delta F}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_i} q \right)_j \right] d\epsilon_i = \frac{dF_i}{dt} d\epsilon_i.$$

Logo, as constantes de movimento são

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial h}{\partial \epsilon_i} q \right)_j - F_i = \text{constante}, \quad (9.3)$$

em que $i = 1, 2, \dots, p$.

Em geral, dado um sistema mecânico com n graus de liberdade, este contém $2n$ constantes de integração e, portanto, temos $2n$ constantes de movimento. Em um sistema fechado, sempre podemos reescrever as ditas constantes de movimento tal que uma delas seja simplesmente uma troca da origem no tempo,

$$q_i = q_i(t, c'_1, c'_2, \dots, c'_{2n}) \rightarrow q_i = q_i(t + t_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n-1}),$$

com $t_0 = t_0(c')$ e $c_i = c_i(c')$. Desse modo, realmente teremos $2n - 1$ constantes de movimento não triviais.

– Teorema de Conservação da Energia:

Primeiramente, vamos considerar a lei de conservação resultante da *homogeneidade do tempo* em um sistema fechado. Em virtude dessa homogeneidade, a lagrangiana não depende explicitamente do tempo t , i.e., $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. Logo, a derivada total no tempo da lagrangiana será,

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i \\ &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right).\end{aligned}$$

Essa relação implica que,

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0.$$

Assim, temos que a quantidade

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \equiv E, \quad (9.4)$$

que é uma constante de movimento e denominamos de energia do sistema. Esse é o *teorema de conservação da energia*.

Dessa última relação, observe que:

$$E \equiv \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i \dot{q}_i p_i - L = H,$$

na qual temos a função hamiltoniana H (que representa a energia total do sistema) e p_i são os *momenta canônicos*.

– **Teorema de Conservação do Momentum Linear:**

Aqui, vamos considerar a lei de conservação resultante da *homogeneidade do espaço*, da qual segue que a lagrangiana de um sistema fechado é invariante quando sujeito a um deslocamento global $\vec{\epsilon}$ de todo o sistema. Logo, $\vec{r}'_i = \vec{r}_i + \vec{\epsilon}$. Desenvolvendo a variação da lagrangiana, δL , até primeira ordem em $\vec{\epsilon}$, encontramos

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{\epsilon} \cdot \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i}.$$

dado que $\vec{\epsilon}$ é arbitrário, a condição $\delta L = 0$ é equivalente à $\sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \delta L &= \vec{\epsilon} \cdot \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \vec{\epsilon} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = 0 \\ &\implies \\ \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} &= \vec{p} = \text{constante}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

No caso de partículas que não interagem:

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i.$$

Assim, a homogeneidade do espaço implica que o *momentum* linear de um sistema fechado é constante no tempo. Esse é o *teorema de conservação do momentum linear*.

A forma do *momentum* linear $\vec{p}$ é independente de, se o sistema estiver livre ou interagindo. As três componentes do *momentum* são todas conservadas somente na ausência de um campo externo. Contudo, componentes individuais poderão ser conservadas na presença de um campo, se a energia potencial no campo não depende das coordenadas cartesianas, *i.e.*, são aquelas associadas a deslocamentos ao longo de direções nas quais os campos externos são invariantes.

Em coordenadas generalizadas, chamamos

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (9.6)$$

momenta generalizados e as derivadas da lagrangiana em relação as coordenadas generalizadas:

$$\mathbf{Q}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (9.7)$$

se denominam forças generalizadas. Dessa forma, as equações de Lagrange são

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i, \quad (9.8)$$

pois V não é função das velocidades.

É interessante observar que a partir da Eq. (9.5) e aplicando as equações de Lagrange, temos:

$$\sum_i \vec{\mathbf{F}}_i = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{\mathbf{r}}_i} = \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i} = 0. \quad (9.9)$$

Ou seja, a soma de todas as forças que atuam sobre todas as partículas em um sistema fechado é nula. Particularizando a Eq. (9.6) para duas partículas, $\vec{\mathbf{F}}_1 + \vec{\mathbf{F}}_2 = 0$, obtemos a *lei da ação e reação*, i.e., a *terceira lei de Newton*.

Se decomposmos o movimento em uma parte relativa ao centro de massa do sistema e outra própria deste, temos

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}} &= \vec{\mathbf{v}}' + \vec{\mathbf{V}} \\ \vec{\mathbf{P}} &= \sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}' + \sum_i m_i \vec{\mathbf{V}} = \sum_i m_i \vec{\mathbf{V}}, \end{aligned}$$

se $\vec{\mathbf{P}}' = \sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}' = 0$ encontramos a velocidade relativa $\vec{\mathbf{V}}$. Logo,

$$\vec{\mathbf{V}} = \frac{\vec{\mathbf{P}}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{\mathbf{v}}_i}{\sum_i m_i}. \quad (9.10)$$

– Teorema de Conservação do Momentum Angular:

O teorema de conservação do momentum angular está associado a isotropia do espaço, i.e., as propriedades mecânicas de um sistema fechado não são afetadas pela orientação do sistema. Em particular, a lagrangiana de um sistema fechado não muda se o mesmo sofrer um giro por um ângulo infinitesimal, como está mostrado na Fig. 9.1. Considerando uma rotação infinitesimal $\delta\phi$ e o eixo de giro $\hat{\mathbf{n}}$, matematicamente, o deslocamento diferencial pode ser escrito como,

$$\delta\vec{\mathbf{r}}_i = \delta\vec{\phi} \times \vec{\mathbf{r}}_i, \quad \delta\vec{\mathbf{v}}_i = \delta\vec{\phi} \times \vec{\mathbf{v}}_i, \quad (9.11)$$

em que $\delta\vec{\phi} = \hat{\mathbf{n}}\delta\phi$ é a quantidade cuja grandeza é igual ao ângulo de rotação infinitesimal e aponta ao longo do movimento. A alteração da lagrangiana L , causada pela rotação infinitesimal é

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta\vec{\mathbf{r}}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{\mathbf{v}}_i} \cdot \delta\vec{\mathbf{v}}_i \right) = \sum_i \left(\dot{\vec{\mathbf{p}}}_i \cdot \delta\vec{\mathbf{r}}_i + \vec{\mathbf{p}}_i \cdot \delta\vec{\mathbf{v}}_i \right) \\ &= \sum_i \left[\dot{\vec{\mathbf{p}}}_i \cdot (\delta\vec{\phi} \times \vec{\mathbf{r}}_i) + \vec{\mathbf{p}}_i \cdot (\delta\vec{\phi} \times \vec{\mathbf{v}}_i) \right] = \delta\vec{\phi} \cdot \sum_i \left(\vec{\mathbf{r}}_i \times \dot{\vec{\mathbf{p}}}_i + \vec{\mathbf{v}}_i \times \vec{\mathbf{p}}_i \right) = 0, \end{aligned}$$

ou seja

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{p}}_i \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathbf{L}} = \sum_i \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{p}}_i = \text{constante}, \quad (9.12)$$