

Cálculo em $\mathbb{R}^n$



Conselho Editorial da Editora Livraria da Física

Amílcar Pinto Martins – Universidade Aberta de Portugal

Arthur Belford Powell – Rutgers University, Newark, USA

Carlos Aldemir Farias da Silva – Universidade Federal do Pará

Emmánuel Lizcano Fernandes – UNED, Madri

Iran Abreu Mendes – Universidade Federal do Pará

José D'Assunção Barros – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Luis Radford – Universidade Laurentienne, Canadá

Manoel de Campos Almeida – Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Maria Aparecida Viggiani Bicudo – Universidade Estadual Paulista - UNESP/Rio Claro

Maria da Conceição Xavier de Almeida – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Maria do Socorro de Sousa – Universidade Federal do Ceará

Maria Luisa Oliveras – Universidade de Granada, Espanha

Maria Marly de Oliveira – Universidade Federal Rural de Pernambuco

Raquel Gonçalves-Maia – Universidade de Lisboa

Teresa Vergani – Universidade Aberta de Portugal

J. Adonai Seixas

Cálculo em $\mathbb{R}^n$



2026

Copyright © 2026 o autor
1ª Edição

Direção editorial: Victor Pereira Marinho e José Roberto Marinho

Edição revisada segundo o Novo Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Seixas, J. Adonai
Cálculo em R^n / J. Adonai Seixas. – 1. ed. – São Paulo: LF Editorial, 2026.

Bibliografia
ISBN 978-65-5563-813-4

1. Cálculo - Estudo e ensino 2. Cálculo numérico 3. Matemática I. Título.

26-394328.0

CDD-515

Índices para catálogo sistemático:
1. Cálculo: Matemática 515

Aline Grazielle Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida
sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora.
Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107
da Lei Nº 9.610, de 19 de fevereiro de 1998



LF Editorial

www.livrariadafisica.com.br

www.lfeditorial.com.br

(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP

(11) 3936-3413 | Editora



Este livro, parte de um projeto com dois volumes, é para ser usado em um curso de Cálculo com várias variáveis, nas engenharias, licenciaturas e bacharelados em Física, Química e, principalmente, em Matemática. Todo o texto tem origem a partir de nossas notas de aula, tanto na graduação, como em cursos de verão que lecionamos no IMECC (UNICAMP) e no ICMC (USP/SC). Portanto, deixamos aqui nossos agradecimentos aos alunos, que não foram poucos, que contribuíram com várias sugestões e correções. Este volume é composto de seis capítulos, que serão descritos a seguir.

O primeiro capítulo, intitulado **Vetores e Funções Vetoriais**, aborda desde as noções básicas de Geometria Analítica e Álgebra Linear até à construção de uma série de conjuntos, essenciais para a compreensão dos conceitos geométricos ligados às funções vetoriais, tais como gráficos, conjuntos definidos implicitamente e as superfícies parametrizadas, onde parametrizamos, em particular, os gráficos e as superfícies de revolução. Quanto ao conteúdo de Álgebra Linear, ele envolve principalmente as transformações lineares, que são usadas fortemente no capítulo 5, **Aplicações Diferenciáveis**, onde é trabalhado com rigor, e muitos exemplos, a noção de aplicações diferenciáveis, no sentido de Fréchet: *aquelas que podem ser aproximadas por funções lineares*. No capítulo 5, também é considerada a **Regra da Cadeia**, em todas as suas formas, tanto clássica, quanto moderna, e várias aplicações deste teorema são feitas, inclusive derivações de segunda ordem de funções compostas, momento onde é definida a *matriz hessiana*.

O segundo capítulo, **Cálculo das Curvas Parametrizadas**, que poderia fazer parte de um livro de Geometria Diferencial, apresenta desde as noções básicas de limite, continuidade e derivabilidade de curvas até a geometria diferencial desses objetos, passando por curvatura, torção e referencial de Frenet. Caracterização das curvas planas e de círculos no espaço são apresentadas como aplicações das **equações de Frenet**.

Vamos ao terceiro, **Funções Contínuas**. Lá, estudamos a noção de limite e continuidade das funções vetoriais, isto é, funções do tipo $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. As definições envolvem os famosos ϵ 's e δ 's e as demonstrações das propriedades básicas são todas feitas com bastante rigor, visando, principalmente, aqueles alunos que pretendem ingressar em uma pós-graduação. Quanto ao rigor, o mesmo pode ser dito sobre todos os capítulos.

O capítulo 4, **Derivadas Parciais**, estuda as derivadas parciais, também as vetoriais, introduz a *matriz jacobiana*, o *campo gradiente*, *operador laplaciano* e, claro, serve de infraestrutura para o capítulo 5. A noção de *plano tangente* também é aí inserida.

Finalmente, o capítulo 6, **Funções Inversa e Implícita**. Inicia estudando sequências no $\mathbb{R}^n$, passa por conjuntos compactos do $\mathbb{R}^n$, **teorema de Weierstrass**, sobre funções contínuas em

ii Prefácio

conjuntos compactos, teorema do ponto fixo de Banach, e norma de uma aplicação linear, tudo objetivando o principal teorema da Análise Matemática, a saber o Teorema da Função Inversa, que é provado nos mínimos detalhes. O, não menos importante, Teorema da Função Implícita é obtido a seguir, primeiro para funções reais de duas variáveis e depois para funções vetoriais do tipo $f : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$. O capítulo termina com um pouco de superfícies regulares, definições e exemplos, bem próximos do que se faz nos cursos de Geometria Diferencial.

Todos os capítulos são recheados de belas figuras, resultado de uma combinação dos programas de computador, o Mathematica e um programa nosso, que vimos trabalhando ao longo dos anos, e que chamamos de GeraT_EX, usado, principalmente, para colocar as legendas das figuras.

Cada capítulo tem uma repleta lista de exercícios, com vários níveis de dificuldade, mas resolvidos de alguma forma, pois são acompanhados de sugestões e soluções, estas postas em um capítulo especial, o Sugestões e Respostas.

Temos um bastante fino conjunto de índices remissivos, o que facilita a manipulação do texto, principalmente quando queremos encontrar uma definição, um objeto, um teorema, em particular. Os símbolos usados no texto estão presentes na alínea símbolos do Índice.

Para finalizar, algumas palavras sobre a utilização deste texto: em geral, os Cursos de Matemática adotam Geometria Analítica e Álgebra Linear como pré-requisito para os cursos de Cálculo com várias variáveis, o que permite o professor usar o capítulo 1, apenas a partir da seção 1.4, Funções Vetoriais. O capítulo 6, num primeiro curso, pode ser usado a partir do Teorema da Função Inversa, sem sua prova, seguindo o roteiro dos exemplos, para ilustrar sua força. A mesma estratégia pode ser usada com o Teorema da Função Implícita, podendo, o professor, levar em conta os detalhes do caso de duas variáveis. Em cursos mais avançados, vimos usando o texto a partir do capítulo 4.

UFAL – 2023
J. Adonai Seixas

“É agradável, com certeza, ver o próprio nome impresso;
um livro é um livro, embora não haja nada nele.”

George Gordon Byron (1809)

“O homem morre mas sua obra permanece.”

Augustin-Louis Cauchy (1857)

“Por que um fuzil vale mais do que uma pedra de giz?”

Eduardo Perdigão (1983)

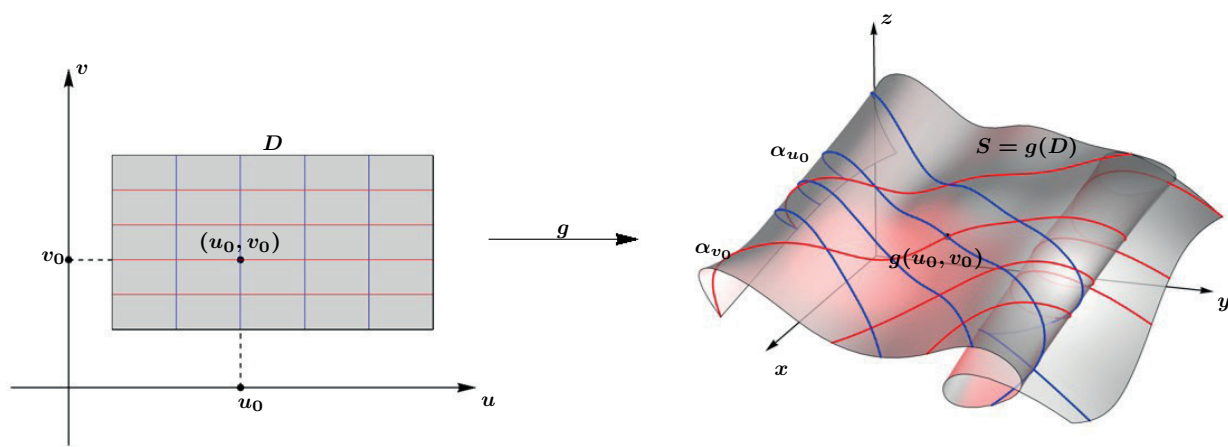
Conteúdo

1	Vetores e Funções Vetoriais	1
1.1	O Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$	2
1.1.4	Operações com n -uplas	2
1.1.13	Interpretações Geométricas	4
1.2	Produto Interno e Norma	7
1.2.7	Interpretações Geométricas	9
1.2.11	A Desigualdade de Cauchy-Schwarz	11
1.3	Retas e Planos	15
1.3.12	Produto Vetorial	19
1.3.27	Distância de um Ponto a uma Reta	25
1.3.32	Distância de um Ponto a um Hiperplano	27
1.4	Funções Vetoriais	28
1.4.6	Conjuntos Associados a Funções Vetoriais	31
1.5	Funções Vetoriais Especiais	37
1.5.22	Superfícies de Revolução	49
1	Exercícios	54
2	Cálculo das Curvas Parametrizadas	61
2.1	Limite e Continuidade	62
2.2	Derivadas	63
2.2.3	Interpretação Geométrica	64
2.2.14	Derivadas de Ordem Superior	69
2.2.19	Interpretação Física	71
2.3	Geometria das Curvas Parametrizadas	72
2.3.8	Curvatura e Torção	74
2.3.27	Curvas Planas	82
2.3.31	Círculos no Espaço	84
2.3.36	Comprimento de Arco	87

2	Exercícios	91
3	Funções Contínuas	98
3.1	Limite	99
3.1.15	Propriedades dos Limites	105
3.2	Continuidade	112
3	Exercícios	120
4	Derivadas Parciais	124
4.1	Derivadas Parciais em $\mathbb{R}^2$	125
4.1.17	Interpretação Geométrica	131
4.2	Derivadas Parciais de Ordem Superior	133
4.2.3	O Teorema de Schwarz	137
4.3	Derivadas Parciais em $\mathbb{R}^n$	142
4.4	Derivadas Parciais Vetoriais	145
4.4.10	Interpretação Geométrica	148
4.5	Derivadas Direcionais	153
4.5.3	Interpretação Geométrica	154
4	Exercícios	158
5	Aplicações Diferenciáveis	163
5.1	A Derivada	164
5.1.21	Aplicações de classe C^1	176
5.1.30	Aproximação Afim	181
5.2	Operações com Aplicações Diferenciáveis	183
5.2.6	A Regra da Cadeia	187
5.3	O Teorema do Valor Médio	200
5.4	Algumas Aplicações do Gradiente	206
5.4.6	Superfícies Definidas Implicitamente	209
5	Exercícios	212

6 Funções Inversa e Implícita	220
6.1 Preliminares	221
6.1.1 Sequências no $\mathbb{R}^n$	221
6.1.24 Funções Contínuas em Conjuntos Compactos	228
6.1.39 Norma de Uma Aplicação Linear	232
6.2 Contrações, Pontos Fixos e Perturbações	237
6.3 O Teorema da Função Inversa	244
6.4 O Teorema da Função Implícita	250
6.4.1 O Caso $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$	251
6.4.9 O Caso $f : D \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$	255
6.5 Superfícies Regulares no $\mathbb{R}^3$	264
6 Exercícios	269
Sugestões e Respostas	280
Índice	302
Referências Bibliográficas	308
Sobre o Autor	310

Vetores e Funções Vetoriais



por
J. Adonai Seixas

1.1

O Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$

Nesta seção, introduziremos a noção de espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, estabelecendo suas propriedades algébricas e geométricas básicas. Começamos com sua definição.

1.1.1

Definição Dado $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, o **espaço euclidiano** $\mathbb{R}^n$ é definido como sendo o conjunto de todas as n -uplas de números reais $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, isto é,

$$\mathbb{R}^n = \{X = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

1.1.2

Definição Dada uma n -upla $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, os números reais $x_1, x_2, \dots, x_n$ são chamados **coordenadas** de X .

1.1.3

Definição Dadas n -uplas $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, diremos que $X = Y$ se $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$.

1.1.4

Operações com n -uplas

As estruturas aditiva e multiplicativa do corpo $\mathbb{R}$ induzem, naturalmente, uma estrutura de espaço vetorial em $\mathbb{R}^n$. A adição de n -uplas e a multiplicação de uma n -upla por um número real são definidas a seguir.

1.1.5

Definição Sejam $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. A **soma** de X com Y , indicada por $X + Y$, é a n -upla $X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$.

1.1.6

Definição Sejam $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $a \in \mathbb{R}$. O **produto** de X pelo número real a , indicada por aX , é a n -upla $aX = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$.

1.1.7

Exemplo No espaço $\mathbb{R}^4$, considere $X = (1, 2, -\pi, \sqrt{2})$, $Y = (2, \sqrt{3}, \pi, 1)$ e $a = \sqrt{2}$. Então, $X + Y = (3, 2 + \sqrt{3}, 0, 1 + \sqrt{2})$ e $aX = (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -\pi\sqrt{2}, 2)$.

Euclides de Alexandria		
Grécia Antiga	305/304 A.C.	207 A.C.

1.1.8

Exemplo Em $\mathbb{R}^7$, considere $X = (0, 1, 2, -1, 0, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $Y = (2, \sqrt{3}, \pi, 1, 0, 2, -\sqrt{3})$. Então, $X + Y = (2, 1 + \sqrt{3}, 2 + \pi, 0, 0, 2 + \sqrt{2}, 0)$.

As proposições que seguem mostram que as operações com n -uplas recém-definidas satisfazem os axiomas de espaço vetorial. Tal fato justifica a terminologia que consiste em chamar uma n -upla, de **vetor no $\mathbb{R}^n$** .

1.1.9

Proposição Se $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$, então valem as seguintes propriedades:

- (i) **[Comutatividade]** $X + Y = Y + X$;
- (ii) **[Associatividade]** $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$;
- (iii) **[Elemento Neutro]** a n -upla $O = (0, 0, \dots, 0)$, chamada n -upla nula (ou zero), é a única n -upla tal que $X + O = X$;
- (iv) **[Simétrico]** a n -upla $-X = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$, chamada simétrico da n -upla X , é a única n -upla tal que $X + (-X) = O$.

Demonstração: Vejamos a demonstração de (ii). As demais são igualmente simples, e serão deixadas como exercício para o leitor. Temos que

$$\begin{aligned} (X + Y) + Z &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, \dots, (x_n + y_n) + z_n) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), \dots, x_n + (y_n + z_n)) \\ &= X + (Y + Z), \end{aligned}$$

onde, na passagem da segunda para a terceira equação, foi usada a propriedade associativa dos números reais. Os demais pontos envolvem apenas a definição 1.1.5. ■

1.1.10

Proposição Se $X, Y \in \mathbb{R}^n$ e $a, b \in \mathbb{R}$, então valem as seguintes propriedades:

- (i) **[Distributividade]** $a(X + Y) = aX + aY$;
- (ii) **[Distributividade]** $(a + b)X = aX + bX$;
- (iii) **[Associatividade]** $(ab)X = a(bX)$;
- (iv) $1X = X$.

Demonstração: Sejam $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Temos que

$$\begin{aligned} a(X + Y) &= a(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (a(x_1 + y_1), a(x_2 + y_2), \dots, a(x_n + y_n)) \\ &= (ax_1, ax_2, \dots, ax_n) + (ay_1, ay_2, \dots, ay_n) = aX + aY, \end{aligned}$$

onde usamos a propriedade distributiva de $\mathbb{R}$ junto com a definição 1.1.5, e obtemos (i). Para (ii), a propriedade distributiva de $\mathbb{R}$ e a definição 1.1.6 são usadas:

$$\begin{aligned}(a + b)X &= ((a + b)x_1, (a + b)x_2, \dots, (a + b)x_n) \\ &= (ax_1 + bx_1, ax_2 + bx_2, \dots, ax_n + bx_n) \\ &= aX + bX,\end{aligned}$$

como queríamos. ■

1.1.11

Corolário $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial de dimensão n .

Demonstração: As proposições 1.1.9 e 1.1.10 mostram que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial. Falta mostrar que $\dim \mathbb{R}^n = n$. Para isto, sejam $e_1, e_2, \dots, e_n$, definidos por

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Note que se $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, então

$$X = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n.$$

Logo, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ gera $\mathbb{R}^n$. Agora se $c_1, c_2, \dots, c_n$ são números reais tais que

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \dots + c_ne_n = (0, 0, \dots, 0),$$

vem que $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, o que completa a prova. ■

1.1.12

Definição A base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ construída acima é chamada **base canônica** do espaço $\mathbb{R}^n$.

1.1.13

Interpretações Geométricas

A interpretação geométrica que descreve $\mathbb{R}$ como uma reta orientada, sobre a qual se escolhe um ponto O , o qual corresponde ao número zero, uma unidade de medida, que corresponde ao número 1, pode ser estendida a uma interpretação geométrica dos espaços euclidianos $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Para $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, fica por conta da imaginação de cada um.



Figura 1: Os Números Reais $\mathbb{R}$

Para visualizar o $\mathbb{R}^2$, tomamos duas cópias de $\mathbb{R}$, as quais chamamos de eixos coordenados. Estes eixos são denotados por eixo- x e eixo- y . O passo seguinte consiste em dispor os eixos coordenados em um plano euclidiano de modo que eles se interceptem ortogonalmente ao longo de suas origens, o que produz o ponto O , que será associado à dupla (2-upla) nula $(0, 0)$, conforme figura 2-(a). Feito isso, uma dupla de $\mathbb{R}^2$, digamos $X = (x_1, x_2)$, é olhada como aquele ponto do plano, também indicado por X , que se projeta ortogonalmente sobre eixo- x e eixo- y naqueles pontos que correspondem a x_1 e x_2 , respectivamente. Isto é feito traçando-se por x_1 , uma reta perpendicular ao eixo- x , e por x_2 , uma reta perpendicular ao eixo- y . A interseção destas perpendiculares é exatamente o ponto do plano que representará X . Deste modo, fica estabelecida uma bijeção entre o plano euclidiano que fixamos e o espaço $\mathbb{R}^2$.

Há situações em que é conveniente representar uma dupla X como um segmento orientado localizado em O . As figuras 2, (a), (b) e (c), exibem duas duplas $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$, de modo que cada uma delas aparece ora como ponto, ora como segmento orientado. Neste ponto, observamos que a noção geométrica de ângulo entre X e Y é mais adequada à figura 2-(c), onde ambas são olhadas como segmentos orientados localizados em O . Já a figura 2-(b) é perfeita para motivar a noção de reta que passa por Y e é paralela a X , conforme definição 1.3.1.

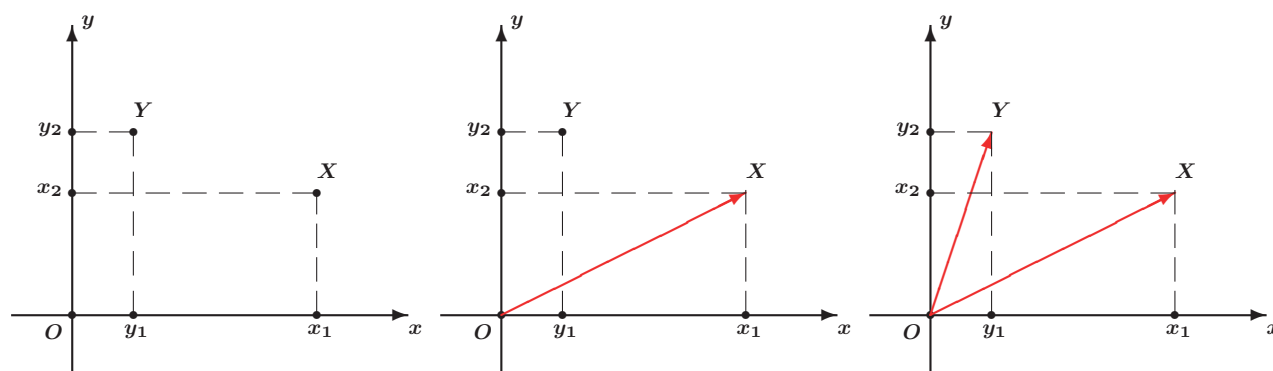


Figura 2-(a)

Figura 2-(b)

Figura 2-(c)

Analogamente, para fazermos geometria em $\mathbb{R}^3$, recorreremos a três retas, que formarão os eixos coordenados, indicados, respectivamente, por eixo- x , eixo- y e eixo- z , e as colocamos no espaço euclidiano tridimensional de modo que elas se interceptem ortogonalmente em suas origens, produzindo o ponto O , que corresponderá à tripla (3-upla) nula $(0, 0, 0)$. Feito isso, temos em mãos três planos especiais, chamados coordenados, e denotados por plano- xy , plano- xz e plano- yz . Agora a uma tripla $X = (x_1, x_2, x_3)$ fazemos corresponder o ponto do espaço cujas projeções ortogonais sobre os eixos coordenados eixo- x , eixo- y e eixo- z coincidem, respectivamente, com os pontos destes eixos que estão associados aos números reais x_1, x_2, x_3 . O conjunto de figuras 3 mostra como isso é feito: inicialmente, marcamos x_1 no eixo- x , x_2 no eixo- y e x_3 no eixo- z . Depois, a partir de x_1 , caminhamos paralelamente ao eixo- y até atingir a medida x_2 , onde encontramos o ponto que representa a projeção de X no plano- xy , que corresponde a $(x_1, x_2, 0)$. Pronto, agora é só subir (se $x_3 > 0$), ou descer (se $x_3 < 0$), paralelamente ao eixo- z até atingir uma altura x_3 , e encontramos o ponto do espaço que representará X . Note que na figura 3-(b), a tripla X é mostrada como um segmento orientado, representante do vetor $\vec{OX}$ ou simplesmente $\vec{X}$, localizado na origem.

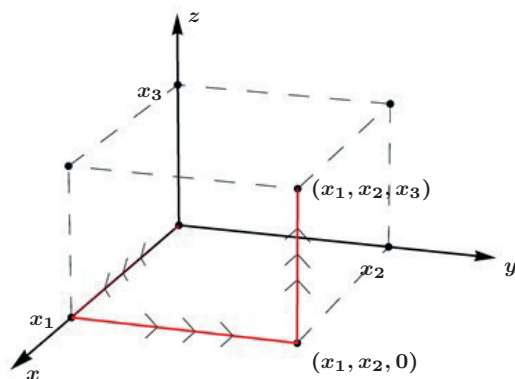


Figura 3-(a): A tripla X

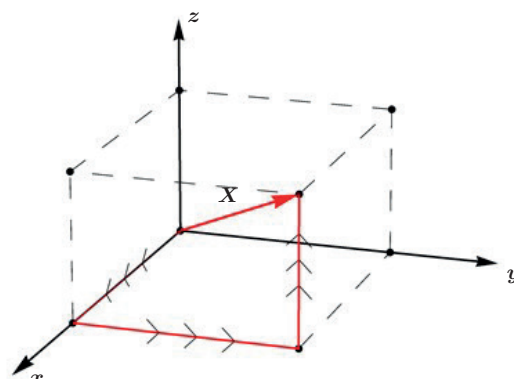


Figura 3-(b): O vetor X

Agora podemos descrever geometricamente a adição de n -uplas e a multiplicação de uma n -upla por um número real. Para isso, usamos as figuras 4, onde marcamos as duplas $X = (x_1, x_2)$ e $Y = (y_1, y_2)$ juntamente com sua soma. Olhando atentamente essas figuras, observamos que a figura 4-(b), a qual mostra X e Y como segmentos orientados localizados em O , nos dá uma regra geométrica evidente: o segmento orientado $X + Y$ é a diagonal do paralelogramo com arestas X e Y . Portanto, a dupla $X + Y$ é o ponto final deste segmento. A regra geométrica contida na figura 4-(c) é a mais simples: localizamos em Y , o segmento orientado X . O ponto final obtido é a dupla $X + Y$. Fácil, não?

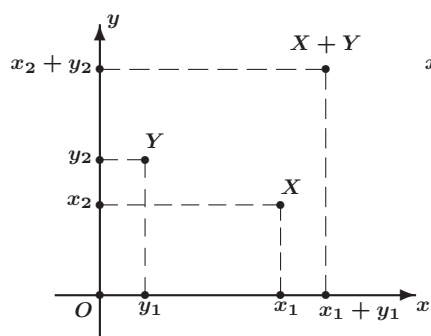


Figura 4-(a)

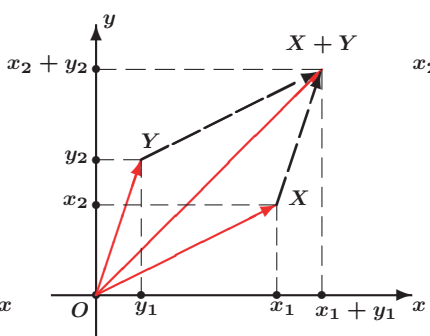


Figura 4-(b)

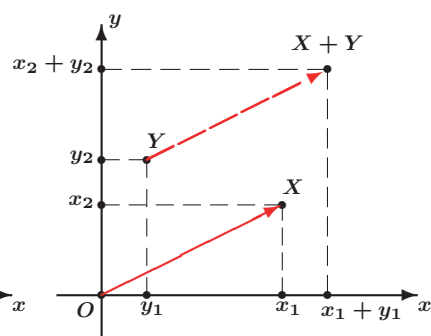


Figura 4-(c)

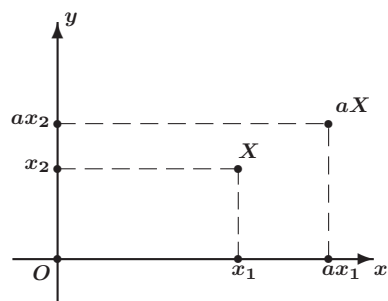


Figura 5-(a): A n -upla aX

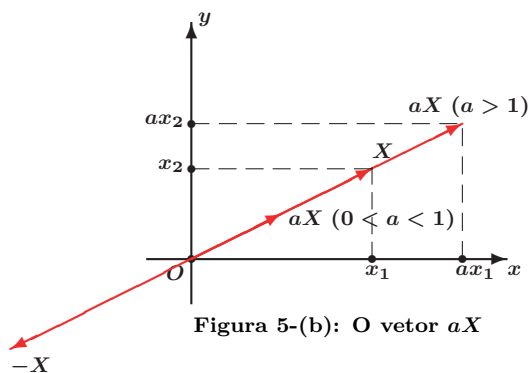


Figura 5-(b): O vetor aX

Para finalizar, consideremos as figuras 5, (a) e (b), postas acima, que ilustram geometricamente como funciona a multiplicação de uma n -upla por um escalar $a \in \mathbb{R}$: a n -upla aX tem

comprimento igual ao comprimento de X multiplicado pelo valor absoluto de a . Seu sentido é o mesmo de X , quando $a > 0$, e lhe é contrário, quando $a < 0$.

1.2 Produto Interno e Norma

Vimos, recentemente, que o espaço $\mathbb{R}^n$ possui uma estrutura de espaço vetorial. Em várias situações, precisamos das noções de comprimento, ângulo, ortogonalidade, não presentes nas operações de espaço vetorial. Estas noções são obtidas a partir de um produto escalar (ou interno), que introduziremos agora.

1.2.1

Definição Sejam $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. O **produto escalar (ou interno)** de X por Y , indicado por $X \cdot Y$, é o número real dado por

$$X \cdot Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

A seguinte proposição descreve as propriedades deste produto.

1.2.2

Proposição Se $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$ são arbitrários, então valem as seguintes propriedades:

- (i) [**Positividade**] $X \cdot X \geq 0$, e $X \cdot X = 0$ se, e somente se, $X = O = (0, 0, \dots, 0)$;
- (ii) [**Comutatividade**] $X \cdot Y = Y \cdot X$;
- (iii) [**Distributividade**] $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$;
- (iv) [**Homogeneidade**] $(aX) \cdot Y = X \cdot (aY) = a(X \cdot Y)$.

Demonstração: Com $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ e $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, temos que

$$\begin{aligned} X \cdot (Y + Z) &= x_1(y_1 + z_1) + x_2(y_2 + z_2) + \dots + x_n(y_n + z_n) \\ &= x_1 y_1 + x_1 z_1 + x_2 y_2 + x_2 z_2 + \dots + x_n y_n + x_n z_n \\ &= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) + (x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots + x_n z_n) \\ &= X \cdot Y + X \cdot Z. \end{aligned}$$

Assim, fica provado (iii). ■

A proposição 1.2.2, em seu item (i), permite-nos dar a seguinte definição .

1.2.3

Definição Seja $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. A **norma (ou comprimento)** de X é dada por

$$\|X\| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

1.2.4

Definição $X \in \mathbb{R}^n$ é dito **unitário** se $\|X\| = 1$.

1.2.5

Exemplo Se $X = (1, 2, -1, 0)$ e $Y = (3, 1, 0, -\sqrt{2})$, então $X \cdot Y = 5$, $\|X\| = \sqrt{6}$ e $\|Y\| = 2\sqrt{3}$.

1.2.6

Proposição Dados $X, Y \in \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}$, temos que

- (i) $\|X\| \geq 0$, e $\|X\| = 0$ se, e somente se, $X = O$;
- (ii) $\|aX\| = |a| \|X\|$, onde $|a|$ é o valor absoluto de a ;
- (iii) se $X \neq O$, o vetor $u_X = X / \|X\|$ é unitário (u_X é conhecido como vetor unitário na direção de X);
- (iv) $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + 2X \cdot Y + \|Y\|^2$;
- (v) $\|X - Y\|^2 = \|X\|^2 - 2X \cdot Y + \|Y\|^2$.

Demonstração: Temos que

$$\|aX\| = \sqrt{(aX) \cdot (aX)} = \sqrt{a^2(X \cdot X)} = |a| \|X\|,$$

o que prova (ii). Agora, usando (ii), vem que

$$\|u_X\| = \left\| \frac{X}{\|X\|} \right\| = \frac{1}{\|X\|} \|X\| = 1,$$

e segue-se (iii). Para (iv), simplesmente expandimos $\|X + Y\|^2$, usando a distributividade e a comutatividade do produto escalar.

$$\|X + Y\|^2 = (X + Y) \cdot (X + Y) = X \cdot X + X \cdot Y + Y \cdot X + Y \cdot Y = \|X\|^2 + 2X \cdot Y + \|Y\|^2.$$

Os demais itens são, também, de prova simples. ■

1.2.7

Interpretações Geométricas

Estudaremos agora os aspectos geométricos envolvidos pelo produto escalar e pela norma. Consideremos a figura 6-(a) a seguir. Note que o triângulo de vértices O , X e $(x_1, x_2, 0)$ é retângulo no vértice $(x_1, x_2, 0)$ e seus catetos medem $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ e x_3 . Logo, sua hipotenusa mede $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, o que coincide com $\|X\|$. Deste modo, podemos visualizar $\|X\|$ como o comprimento (euclidiano) do segmento orientado X . Isto também acontece no $\mathbb{R}^2$, como o leitor pode verificar facilmente.

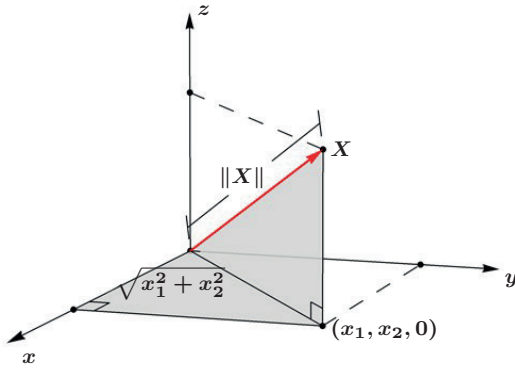


Figura 6-(a)

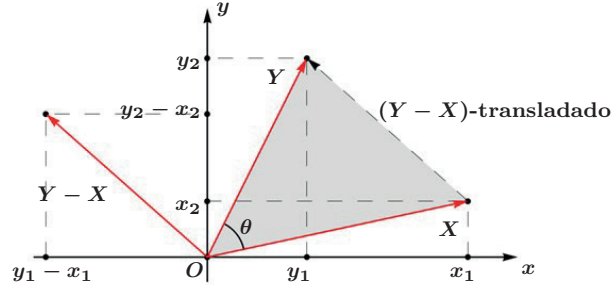


Figura 6-(b)

Tomemos agora X, Y dois vetores em $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) que fazem entre si um ângulo θ , como mostra a figura 6-(b). (Note a interpretação geométrica para a diferença $Y - X$: o segmento orientado, localizado em X , que representa $Y - X$ termina em Y .) Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo $\triangle OXY$, obtemos que

$$\|Y - X\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2\|X\|\|Y\|\cos\theta,$$

o que comparado com (v) da proposição 1.2.6 dá que

$$X \cdot Y = \|X\|\|Y\|\cos\theta. \quad (\P_1)$$

Assim vemos que a noção de produto interno está bem ligada à noção de ângulo entre vetores, e colhemos a seguinte proposição, onde $\angle(X, Y)$ indica o único ângulo, no intervalo $[0, \pi]$, entre os vetores X e Y .

1.2.8

Proposição Se $X, Y \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) e $\theta = \angle(X, Y)$, então $X \cdot Y = \|X\|\|Y\|\cos\theta$. Em particular, vale a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**:

$$|X \cdot Y| \leq \|X\|\|Y\|,$$

a igualdade ocorrendo apenas quando X e Y são linearmente dependentes.

1.2.9

Exemplo A proposição 1.2.8 mostra que dois vetores X e Y em $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, são perpendiculares se, e somente se, $X \cdot Y = 0$. De fato, X e Y são perpendiculares se, e somente se, $\angle(X, Y) = \pi/2$. Como caso particular disto, note que dado $X = (x_1, x_2)$, o vetor $Y = (-x_2, x_1)$ é perpendicular a X . O vetor Y é obtido de X por uma rotação em torno de O no sentido anti-horário. Como exercício, o leitor deve esboçar os vetores X e Y , para se convencer deste fato.

Continuando com a nossa discussão geométrica construiremos, agora, o que chamamos de projeção ortogonal de um vetor na direção de outro não-nulo dado. Sejam, então, $X \neq O$ e Y como na figura 7, onde $u_X = X/\|X\|$ é o vetor unitário na direção de X , $\theta = \angle(X, Y)$ e $\mathbf{P}_X Y$ é o vetor obtido pela projeção ortogonal de Y sobre X . Assim $\mathbf{P}_X Y = au_X$, onde

$$a = \|Y\| \cos \theta = u_X \cdot Y = \frac{X \cdot Y}{\|X\|}.$$

Logo,

$$\mathbf{P}_X Y = \frac{X \cdot Y}{\|X\|^2} X.$$

Da construção de $\mathbf{P}_X Y$ decorre facilmente que o vetor $Y - \mathbf{P}_X Y$ é ortogonal a X , o que pode ser verificado, também, analiticamente:

$$X \cdot (Y - \mathbf{P}_X Y) = X \cdot \left(Y - \frac{X \cdot Y}{\|X\|^2} X\right) = X \cdot Y - X \cdot Y = 0.$$

É conveniente notar aqui que a expressão que define $\mathbf{P}_X Y$ pode muito bem ser usada para o espaço $\mathbb{R}^n$, visto que ela não contém nenhum apelo geométrico explícito. Isto será parte do conteúdo da próxima subseção.

1.2.10

Exemplo Considere, em $\mathbb{R}^2$, o triângulo $\triangle ABC$, $A = (1, 1)$, $B = (3, 2)$ e $C = (0, 4)$. Os vetores $X = C - B$ e $Y = A - B$ aparecem na figura 8, localizados em B . Temos que $X = (-3, 2)$, $Y = (-2, -1)$, $X \cdot Y = 4$, $\|X\|^2 = 13$ e

$$\mathbf{P}_X Y = \frac{4}{13} X = \frac{4}{13}(-3, 2).$$

Agora fica fácil calcular a altura relativa ao lado BC , h_{BC} , do triângulo $\triangle ABC$. De fato, temos

$$h_{BC} = \|Y - \mathbf{P}_X Y\| = \left\| \left(-\frac{14}{13}, -\frac{21}{13}\right) \right\| = 7 \frac{\sqrt{13}}{13}.$$

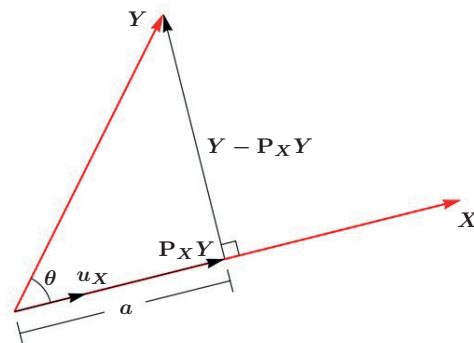


Figura 7: Projeção de Y sobre X

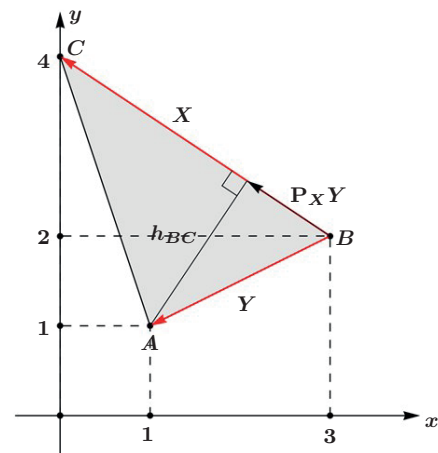


Figura 8: Cálculo da altura relativa a $\overline{BC}$