Um curso fechado e limitado de Análise Real

Textuniversitários nº 44

Comissão editorial:
Thiago Augusto Silva Dourado
César Polcino Milies
Carlos Gustavo Moreira
Fábio Maia Bertato
Willian Diego Oliveira
Gerardo Barrera Vargas

Renan M. Mezabarba

Um curso fechado e limitado de Análise Real

Editora Livraria da Física
São Paulo — 2026

Copyright © 2026 LF Editorial

1a. Edição

Editor: Victor Pereira Marinho / José Roberto Marinho
Projeto gráfico e diagramação: Thiago Augusto Silva Dourado
Capa: Fabrício Ribeiro

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Mezabarba, Renan M.
Um curso fechado e limitado de analise real / Renan M. Mezabarba. –– São Paulo : LF Editorial, 2026. –– (Textuniversitarios ; 44)

Bibliografia.
ISBN 978-65-5563-825-7

1. Análise matemática 2. Matemática 3. Teoria dos conjuntos 4. Topologia I. Título II. Série.

26-398759.0 CDD-510

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática 510

Maria Alice Ferreira – Bibliotecária – CRB-8/7964

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta obra poderá ser reproduzida sejam quais forem os meios empregados sem a permissão da Editora. Aos infratores aplicam-se as sanções previstas nos artigos 102, 104, 106 e 107 da Lei n. 9.610, de 19 de fevereiro de 1998.

Impresso no Brasil
Printed in Brazil

www.lfeditorial.com.br
Visite nossa livraria no Instituto de Física da USP
www.livrariadafisica.com.br
Telefones:
(11) 2648-6666 | Loja do Instituto de Física da USP
(11) 3936-3413 | Editora

Quis custodiet ipsos custodes?[0]

Juvenal, Sátiras, VI, linha 347.

[0] Quem vigia os vigilantes?

Prefácio

O presente material é a reformulação de um primeiro texto de mesmo título, que comecei a escrever por volta de 2021, mas cuja narrativa não se mostrou apropriada para, efetivamente, acompanhar cursos de Análise: a versão original continha uma abordagem bastante generalista, o que dificultaria tanto o trabalho de quem porventura fosse usá-lo para lecionar (eu) quanto a vida de quem se propusesse a estudá-lo (*você*[0]). Por isso, a presente versão distribui os assuntos de forma diferente e mais organizada (a fim de facilitar a vida de eventuais docentes) e adota uma escrita mais amigável (para não assustar demais possíveis estudantes, que constituem o público-*alvo* do texto).

Em resumo, as três primeiras partes se destinam a cobrir *com alguma folga* a ementa do curso de Análise I do Bacharelado em Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz (Ilhéus/BA), com a grade em vigor no ano de 2024. Explicitamente: "números

[0] Espero que não se importe com a intimidade de me referir diretamente a *você* em vez de "ao leitor". Essa é a forma gramaticalmente aceitável que encontrei de escrever de maneira mais *neutra*.

reais, topologia da reta, limite e continuidade de funções na reta e derivação". No entanto, a *folga* é grande o suficiente para permitir *adaptações*, de modo a incluir tópicos de Análise II[1] e mesmo Análise III[2], tornando assim o material utilizável em cursos de outras instituições.

"Mas por que fazer isso? O Brasil já tem seus cânones da Análise!"

É justamente pela existência dos cânones que me sinto confortável em propor uma abordagem alternativa, mais alinhada ao panorama matemático de quem se interessa por Fundamentos da Matemática, Topologia Geral e Teoria dos Conjuntos. Se o texto parecer generalista, filosófico ou excessivamente teórico para algumas pessoas, os cânones permanecerão onde sempre estiveram, prontos para guiar quem preferir seguir o percurso tradicional e a receita consagrada.

Para conciliar a generalidade que eu realmente gostaria de empregar com as *possíveis* limitações burocrático-culturais intrínsecas ao contexto em que este material poderá ser usado, os conteúdos que *extra*polam a ementa de Análise I supracitada foram distribuídos ao longo de seções *extras*. Isto nos traz à discussão da organização do texto.

Cada uma das três primeiras *partes* corresponde a um terço do curso de Análise I. Por sua vez, os *capítulos* correspondem *aproximadamente* aos conteúdos individuais das aulas. Porém, alguns capítulos maiores podem requerer um pouco mais de tempo a depender da profundidade desejada, do ânimo da turma, dos feriados na semana, etc.

Para calibrar a profundidade desejada, os capítulos de conteúdo das três primeiras partes têm, em geral, duas seções: a "Essencial" e a "Extras". De modo geral, a primeira traz os assuntos que considero

[1] Explicitamente: "integração de Riemann (própria e imprópria), sequências e séries de funções e topologia de espaços euclidianos".

[2] Explicitamente: "caminhos no espaço euclidiano; continuidade e diferenciabilidade de funções reais de várias variáveis; integrais curvilíneas; continuidade e diferenciabilidade de funções vetoriais; teorema da função inversa e consequências".

indispensáveis para serem abordados no curso para o qual este texto originalmente se destina, enquanto a segunda sugere discussões de aprofundamento (cuja leitura é opcional aqui, mas que pode ser obrigatória a depender do seu contexto).

Como de costume em textos de Análise, a parte I trata de conjuntos, noções de cardinalidade, corpos ordenados, supremos e ínfimos. Desse modo, num cenário ideal, tudo isso pode ser omitido por já ter sido abordado em outras disciplinas, o que permite dar mais atenção aos tópicos seguintes[3].

Por sua vez, a parte II discute limites, continuidade e topologia, exatamente nessa ordem. Embora seja ruim sob um ponto de vista bourbakista, tal ordenamento busca partir dos assuntos já dominados pelo público-alvo a fim de fundamentá-los e generalizá-los. Mas há duas *pegadinhas*.

(I) Muitas vezes, intervalos abertos serão usados no lugar de épsilons e deltas, como preparação para os argumentos topológicos por meio de *abertos*.

(II) Os limites considerados serão os limites de *redes*, e não *apenas* os de sequências e funções. Isto permitirá tratar de diversas noções de limite já nos primeiros capítulos — inclusive integrais de Riemann!

As seções extras dessa parte, por sua vez, trazem a perigosa sugestão de substituir expressões do tipo "$|x - y| < \varepsilon$" por outras como "$\|x - y\| < \varepsilon$" ou "$d(x, y) < \varepsilon$", o que na prática significa expandir as discussões na reta para espaços normados e métricos, respectivamente. Derivadas são apresentadas do modo tradicional ao final da parte II, enquanto a formulação de Carathéodory, mais apropriada para dimensões maiores, é sugerida como conteúdo extra[4].

[3] Convém destacar que os cinco primeiros capítulos da parte I são *fortemente* baseados no texto exposto em [30], embora sem a mesma profundidade.

[4] E se você nunca ouviu falar nisso, por favor, dê uma chance à formulação: você não irá se arrepender.

A parte III se aprofunda nos principais teoremas da Análise *Elementar*. Os três primeiros capítulos trazem os aspectos topológicos da compacidade e da conexidade, manifestados nos Teoremas de Heine-Borel, Heine-Cantor e do Valor Intermediário na reta real, enquanto as seções extras generalizam esses resultados para outras classes de espaços. Integrais de Riemann e o Teorema Fundamental do Cálculo ficam por conta do último capítulo dessa parte — e aqui, como tudo é *Extra* segundo a ementa de Análise I adotada na UESC, a distinção "Essencial vs. Extras" se torna apenas uma sugestão sobre o que fazer se sobrarem aulas ao final do período letivo.

Evidentemente, os assuntos das seções extras das partes II e III podem/devem ser tratados em disciplinas de Análise II ou III. Se for o seu caso, a parte IV compila mais algumas discussões que podem ser úteis nesses cenários — por tal razão, a distinção "Essencial vs. Extras" é abandonada nessa parte. Eu gostaria de ter acrescentado mais coisas, mas minha paciência é *limitada*.

Assim, quem decidir *enfrentar todos* os capítulos, seções e subseções das partes I, II e III terá feito, ao final da jornada, um curso de Análise I *robusto*, com muitos acenos a tópicos mais avançados de Análise II, Análise III, Análise Funcional, Topologia, etc. Por outro lado, nada impede que você *enfrente* "apenas" o Essencial dessas partes — se for o seu caso, ao final da jornada você terá feito um curso de Análise I *honesto*, com a vantagem de ter se guardado para muitas surpresas nos cursos seguintes. E em ambos os casos, a escolha do verbo "enfrentar" é séria: será trabalhoso.

Sem brincadeira: há muitos exercícios ao longo do texto, para serem feitos, preferencialmente, durante a "leitura", bem como exercícios adicionais, agrupados em capítulos especiais. São pelo menos 500 exercícios, desde verificações simples que você deveria fazer sem que o *texto* precisasse pedir, mas que você achou que não precisava, até alguns resultados mais específicos garimpados nos confins do `math.stackexchange`. Para te ajudar (ou não), eles serão classificados *subjetivamente* em três tipos principais ($\star$, $\overset{\star}{\star}$ e $\overset{\star}{\star\star}$) descritos a seguir.

($\star$) Verificações (que deveriam ser) corriqueiras. Embora nem todos os exercícios nesta classe sejam imediatos, a maioria consiste em "abrir" as definições e fazer as "contas" naturais ao contexto em questão. Esses exercícios não são do tipo que "cai em prova", mas são bons aquecimentos caso você ainda não tenha prática em escrever demonstrações mais complicadas.

($\overset{\star}{\star}$) Exercícios típicos de listas e provas. Consistem em aplicar resultados previamente demonstrados (tanto no texto quanto em questões anteriores), ou "reciclar" ideias e argumentos a fim de testar o seu entendimento do assunto: quanto maior sua familiaridade, mais fácil será para você fazer os malabarismos necessários.

($\overset{\star}{\star\star}$) Estes geralmente são mais difíceis, elaborados ou "*filosóficos*". Na prática, eles não apenas "testam" a familiaridade com o assunto, mas também dão a oportunidade de exercitar um pouco mais a criatividade e a reflexão.

Comentários do tipo "(verifique!)$^{\star}_{\star}$", "(por quê?)*" e afins também devem ser encarados como propostas implícitas de exercício — e os expoentes apenas classificam os problemas de acordo com os critérios acima.

Tente fazer exercícios de todos os tipos: lidar com os "fáceis" te ajudará a ganhar ritmo para enfrentar os "médios" e, ao resolver alguns "difíceis", você *pode* aprender técnicas para transformar os exercícios "médios" em "fáceis". Outra dica: se já souber EXATAMENTE como fazer um exercício, pule para o próximo. Mais uma: se ficar muito tempo num exercício sem conseguir resolvê-lo, pule para o próximo e volte mais tarde! A última: é altamente recomendável que você já tenha feito pelo menos algum curso de Cálculo e, se possível, cursos de (Introdução à) Teoria dos Números (para ter familiaridade com indução) e de Álgebra Linear (para aproveitar as discussões em espaços normados).

Por fim, agradecimentos às minhas turmas de Análise. Desde a minha primeira turma de Análise II, ainda na UFES em 2019, que

me fez acreditar que os livros de Análise já publicados no Brasil não precisam ser a *única* opção para lecionar a disciplina por aqui, até as mais recentes, na UESC, que me fizeram perceber a necessidade de reformular meu texto original. Estendo também meu "muito obrigado" a Pryscilla Silva, que, ao usar este material em suas aulas, teve a paciência de compartilhar comigo muitas observações pertinentes, entre outras coisas. Finalmente, agradeço ao Thiago Dourado e à LF Editorial por mais um voto de confiança.

Renan M. Mezabarba
Ilhéus-BA, 11 de fevereiro de 2026.

Sumário

Prefácio vii

Prólogo: Análise para quê? xxi

I A reta real 1

0 Conjuntos e funções 5
0.0 Essencial . . . 5
0.0.0 Conjuntos . . . 5
0.0.1 Funções . . . 11
0.1 Extra . . . 14
0.1.0 Fundamentos debaixo do tapete . . . 14

1 Funções injetoras, sobrejetoras e a noção de cardinalidade 17
1.0 Essencial . . . 17
1.0.0 Injeções, sobrejeções e bijeções . . . 17
1.0.1 A noção de cardinalidade . . . 20
1.1 Extras . . . 22

1.1.0 Relações binárias e inversas 22
1.1.1 Equivalências, partições e cardinais 24

2 Ordens, boas ordens e indução **33**
2.0 Essencial 33
2.0.0 Ordens 33
2.0.1 Boas ordens e indução 38
2.1 Extras 43
2.1.0 Elementos minimais e maximais 43
2.1.1 Dualidade 44

3 Os axiomas de Dedekind-Peano **47**
3.0 Essencial 47
3.0.0 Boas ordens naturais 47
3.0.1 Axiomatizando o infinito 50
3.1 Extras 54
3.1.0 Recursão 54
3.1.1 Recursão mais uma vez: demonstração do teorema 3.5 58
3.1.2 Boas ordens não naturais 62
3.1.3 Afinal, zero é natural? 63

4 Ao infinito e além **65**
4.0 Essencial 65
4.0.0 Conjuntos finitos 65
4.0.1 Dois tipos de infinito 67
4.1 Extras 73
4.1.0 Uma demonstração para o Teorema de Cantor-Bernstein 73
4.1.1 Construção dos inteiros e dos racionais 76
4.1.2 O problema da escolha e o sentido da existência . 79
4.1.3 Como representar os infinitos? 83

5 Exercícios adicionais **87**

6 Estruturas algébricas básicas **95**
6.0 Essencial . . . 95
6.0.0 Operações binárias e elementos especiais . . . 95
6.0.1 Anéis e corpos . . . 100
6.1 Extras . . . 103
6.1.0 Morfismos entre anéis . . . 103
6.1.1 Espaços vetoriais e transformações lineares . . . 105

7 Botando ordem na Álgebra **109**
7.0 Essencial . . . 109
7.0.0 Corpos ordenados . . . 109
7.0.1 Valor absoluto e a desigualdade triangular . . . 113
7.1 Extras . . . 114
7.1.0 Espaços vetoriais ordenados . . . 114
7.1.1 Corpos não ordenáveis . . . 116

8 Supremos e ínfimos **117**
8.0 Essencial . . . 117
8.0.0 Definição e exemplos . . . 117
8.0.1 Supremos e ínfimos em corpos ordenados . . . 120
8.1 Extras . . . 123
8.1.0 Supremos e ínfimos em ordens . . . 123
8.1.1 Corpos estendidos e intervalos . . . 124

9 Completude (no sentido de Dedekind) **129**
9.0 Essencial . . . 129
9.0.0 Cortes e corpos completos . . . 129
9.0.1 A condição arquimediana . . . 134
9.1 Extras . . . 136
9.1.0 Corpos não arquimedianos . . . 136
9.1.1 Análise "não *standard*" . . . 138

10 A reta real: definição, unicidade e cardinalidade **139**
10.0 Essencial . . . 140
10.0.0 Unicidade de corpos completos . . . 140

10.0.1 A cardinalidade da reta real 146
10.1 Extras 151
10.1.0 Somatórios e produtórios 151
10.1.1 Construções da reta real 153
10.1.2 Outras bijeções curiosas 154
10.1.3 Opcional: indução na prática 156

11 Exercícios adicionais **161**

II Limites e continuidade **165**

12 Noções de convergência **169**
12.0 Essencial 169
12.0.0 Limites de sequências e funções 169
12.0.1 Limites de redes reais 171
12.1 Extras 174
12.1.0 Normas e produtos internos 174
12.1.1 Espaços métricos 177
12.1.2 Exercícios 179

13 Estudos de caso **181**
13.0 Essencial 181
13.0.0 Alguns exemplos importantes 181
13.0.1 Limites na reta estendida 186
13.1 Extras 191
13.1.0 Limites laterais e funções monótonas 191
13.1.1 Supremos e ínfimos revistos (parte I) 197
13.1.2 Bolas abertas e limites em espaços métricos . . . 197
13.1.3 Exercícios 204

14 A "álgebra ordenada" dos limites **205**
14.0 Essencial 206
14.0.0 Operações com limites reais 206
14.0.1 Operações com limites na reta estendida 212

14.0.2 Monotonicidade, sanduíche e confronto 216
14.1 Extras 222
14.1.0 Integrais de Riemann como limites de redes (parte I) 222
14.1.1 Operações com limites em espaços normados . . 230
14.1.2 Exercícios 233

15 O critério de Cauchy **235**
15.0 Essencial 235
15.0.0 Subsequências (e o Teorema de Bolzano-Weierstrass) 235
15.0.1 O critério (de completude) de Cauchy 245
15.1 Extras 249
15.1.0 Cofinalidade, sub-redes e limites laterais revisitados 249
15.1.1 Espaços métricos completos 255
15.1.2 Exercícios 259

16 Alguns critérios de convergência para séries **261**
16.0 Essencial 261
16.0.0 Convergência absoluta 261
16.0.1 Alguns testes clássicos 264
16.1 Extras 267
16.1.0 O Teste M de Weierstrass 267
16.1.1 Convergência relativa e o surpreendente Teorema de Riemann 269

17 Exercícios essenciais **271**

18 Continuidade **277**
18.0 Essencial 279
18.0.0 Continuidade via convergência 279
18.0.1 Exemplos iniciais 282
18.1 Extras 286
18.1.0 Continuidade em espaços métricos 286

18.1.1 Continuidade de transformações lineares 288
18.1.2 Exercícios 290

19 A topologia da reta **293**
19.0 Essencial 293
19.0.0 Abertos da reta e abertos relativos 293
19.0.1 Continuidade topológica 296
19.1 Extras 298
19.1.0 Espaços topológicos e homeomorfismos 298
19.1.1 Produtos e subespaços 303
19.1.2 Supremos e ínfimos revistos (parte II) 306
19.1.3 Exercícios 309

20 Limites de funções **311**
20.0 Essencial 311
20.0.0 Limites de funções em pontos de acumulação . . 311
20.0.1 Mudança de variáveis 316
20.0.2 Derivadas 317
20.1 Extras 326
20.1.0 Importante: derivadas à moda Carathéodory . . 326
20.1.1 Derivadas em dimensões maiores 329
20.1.2 Exercícios 334

21 Exercícios adicionais **339**

III Os teoremas fundamentais da Análise **357**

22 Teorema de Heine-Borel-Lebesgue **361**
22.0 Essencial 361
22.0.0 Compacidade e o Teorema de Heine-Borel-Lebesgue 361
22.0.1 Os Teoremas de Weierstrass e do Valor Médio . . 366
22.1 Extras 369
22.1.0 Compacidade em espaços métricos e topológicos 369

22.1.1 O Lema de Riesz e a dimensão de espaços normados . . . 375
22.1.2 Exercícios . . . 381

23 Teorema de Heine-Cantor **383**
23.0 Essencial . . . 383
23.0.0 Continuidade uniforme e o Teorema de Heine-Cantor . . . 383
23.0.1 Extensão de funções uniformemente contínuas . 386
23.1 Extras . . . 391
23.1.0 Integrais de Riemann como limites de redes (parte II) . . . 391
23.1.1 Convergência uniforme vs. convergência simples 394
23.1.2 Séries de potência . . . 399
23.1.3 Uniformidade em espaços métricos . . . 406

24 Teorema do Valor Intermediário **413**
24.0 Essencial . . . 413
24.0.0 Conexidade e intervalos . . . 413
24.0.1 O Teorema do Valor Intermediário e aplicações . 415
24.1 Extras . . . 420
24.1.0 Componentes conexas . . . 420
24.1.1 Conexidade em outros espaços . . . 424
24.1.2 O conjunto de Cantor . . . 428
24.1.3 Exercícios . . . 430

25 Exercícios adicionais **431**

26 Teorema Fundamental do Cálculo **445**
26.0 Essencial . . . 445
26.0.0 Uma abordagem axiomática para o T.F.C. . . . 445
26.0.1 A integral de Riemann revisitada . . . 450
26.1 Extras (Importante) . . . 460
26.1.0 Os critérios de Darboux e Lebesgue para integrais de Riemann . . . 460

26.1.1 Integração imprópria 476
26.1.2 O TFC revisitado 480

27 Exercícios adicionais **485**

IV Tópicos complementares **495**

28 Derivadas em espaços euclidianos **499**
28.0 Derivadas direcionais e parciais 499
28.1 Critérios de diferenciabilidade 504
28.2 Derivação iterada 514
28.3 Comentários adicionais 521

29 Integração à moda Lebesgue — mas sem medida **523**
29.0 Como completar a integral de Riemann 524
29.1 Funções Lebesgue integráveis e suas integrais 534

30 Compacidade em espaços de funções **553**
30.0 O Teorema de Arzelà-Ascoli 553
30.1 O Teorema de Stone-Weierstrass 561

Lista de símbolos e siglas **567**

Referências Bibliográficas **575**

Índice Remissivo **579**